L'UTILISATION DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET DES NOMBRES COMPLEXES DANS LES RECHERCHES ÉCONOMIQUES

PAR J. TINBERGEN

Communication présentée à la réunion de la Société d'Économétrie, Lausanne, septembre 1931.

1. INTRODUCTION

LES considérations suivantes se rapportent à la théorie des oscillations économiques. Comme résultat idéal de toutes les recherches à ce sujet, on peut, il me semble, indiquer la découverte des causes et du mécanisme du mouvement cyclique général des affaires. Au point de vue quantitatif, on est encore loin d'avoir satisfait à cette exigence idéale. Un accord satisfaisant entre théorie et observation statistique n'existe que dans certains cas très simples. Pour les cas plus compliqués, il n'y a guère de théorie quantitative suffisamment élaborée, et les corrélations qu'on a trouvées expérimentalement manquent souvent d'une base logique assez fondée. Il y a donc ici un champ très étendu pour la Société d'Économétrie. J'espère donner ici une petite contribution aux recherches théoriques dans ce champ. Cette contribution n'a cependant qu'un caractère préparatoire.

Comme presque toute considération théorique part de certaines approximations de la réalité, l'étude suivante est basée elle aussi sur quelques hypothèses simplificatrices. Ces simplifications sont suggérées spécialement par les recherches de M. Hanau sur la formation des prix du porc[1], montrant qu'il y a des cycles très nets d'environ 3 à 4 ans dans les prix et l'offre de cet espèce de viande. Ces cycles (les cycles "porcins") ont pour cause principale le délai entre le prix et l'offre; délai résultant surtout de la durée de la production. De pareils cycles avaient été démontrés antérieurement par d'autres auteurs, mais il me semble que les recherches de M. Hanau sont les plus complètes et les plus nettes. La théorie de ces cycles a été développée par M. Moore.[2]— L'existence d'un délai assez constant entre le prix et l'offre a été démontrée pour plusieurs autres biens.[3] A côté de l'hypothèse d'un délai constant je me baserai sur l'hypothèse que les courbes d'offre et

[1] A. Hanau, Die Prognose der Schweinepreise. Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 18. Berlin, 1930.

[2] Voir p.e. H. L. Moore, *Synthetic Economics*, New York, 1930.

[3] Voir p.e. M. Ezekiel, Preisvoraussage bei landwirtsch. Erzeugnissen, Veröffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung, Heft 9 Bonn, 1930.

de demande soient rectilignes. La plupart des recherches sur ce point me semblent indiquer que cette hypothèse est valable avec assez d'exactitude. En troisième lieu je me base sur quelques recherches sur la spéculation par le Département d'Agriculture des États-Unis, montrant que la demande spéculative (voir §3) est à peu près proportionnelle à la dérivée du prix par rapport au temps.

Les problèmes théoriques, que je traiterai, partent du cas idéal qu'on peut construire des recherches de M. Hanau, le cas le plus simple, en même temps, des "Synthetic Economics" de Moore, et le généralisent de plusieurs manières. Une telle généralisation est nécessaire quand on désire approximer successivement les mouvements cycliques réels. D'un côté la forme extérieure de ces mouvements diffère essentiellement de celle des cycles "porcins." Dans ces cycles-là la différence de phase entre le prix et l'activité (voir §5) est d'$\frac{1}{4}$ de la période, tandis que cette différence de phase est très petite pour les cycles généraux: c'est là justement la cause que dans la courbe B du baromètre de Harvard University les prix et l'activité ont été combinés. D'autre part le caractère du marché du porc est beaucoup trop simple ce qui explique peut-être les différences signalées. Ce caractère trop simple consiste dans les approximations suivantes valables pour le cas du porc:

1. le bien considéré a une période très courte de consommation;
2. la demande dépend principalement du prix; d'autres facteurs, comme le pouvoir d'achat des consommateurs n'ont qu'une influence secondaire;
3. il n'y a pas de spéculation à ce marché.

Les généralisations désirables seront donc:

1. La période de consommation n'est pas négligeable;
2. La demande dépend encore d'autres facteurs. Surtout me semble intéressant le cas où le pouvoir d'achat a une influence considérable et où ce pouvoir d'achat résulte de l'activité dans la branche elle-même. C'est ce qu'on aura aussitôt qu'on considère un système économique fermé; pour une théorie endogène des cycles un tel système doit être indispensablement la base. En second lieu il sera intéressant de traiter le cas où existe un plus grand nombre de marchés et qui s'influencent réciproquement.
3. Une demande spéculative est introduite. Naturellement le problème des cycles économiques n'est pas épuisé par ces généralisations. Le présent auteur ne l'ignore pas du tout. Une première restriction très grande est que seulement des mouvements périodiques seront contemplés. Beaucoup d'autres restrictions pourraient être nommées. L'importance de l'étude suivante est donc très bornée.

Le fait remarquable du point de vue mathématique c'est que les problèmes posés—problèmes d'une nature économique très simple—nous mènent déjà à des questions mathématiques assez compliquées.

2. Bien de consommation directe

Les propriétés caractéristiques, pour notre but, du marché d'un tel bien seront retrouvés dans le schéma suivant:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fonction de l'offre: } A_0 + A_1 p(t-\theta);\\ \text{Fonction de la demande: } B_0 - B_1 p(t),\end{array}\right\} \tag{1}$$

ou A_0, A_1, B_0, et B_1, sont des constantes positives, $p(t)$ est l'écart entre le prix au moment t et le prix P d'équilibre à la longue, et θ est le délai entre le prix et l'offre (p.e. la durée de la production). De la définition de $p(t)$ il suit que

$$A_0 = B_0,$$

tandis qu'à chaque moment on aura l'égalité de l'offre et de la demande instantanés:

$$A_1 p(t-\theta) = -B_1 p(t), \tag{2}$$

équation à laquelle doit satisfaire le mouvement de p. On voit que, étant donnée la valeur de $p(t)$ pour l'intervalle

$$0 \leqq t < \theta, \tag{3}$$

le mouvement de $p(t)$ pour tout $t \geqq \theta$ sera connu.

L'équation (2), équation fonctionnelle linéaire de type simple, peut être résolue d'une façon très facile. On aura

$$p(t) = -\frac{A_1}{B_1} p(t-\theta),$$

d'où l'on déduit sans peine que le mouvement du prix sera une oscillation purement périodique pour $A_1 = B_1$, une oscillation amortie pour $A_1 < B_1$ et une oscillation "explosive" pour $A_1 > B_1$. La forme de l'oscillation dépend entièrement du mouvement donné du prix pour l'intervalle (3), tandis que sa période T est en tout cas $T = 2\theta$.

Bien que cette solution soit tout à fait claire, il sera utile d'établir encore une autre méthode de solution, méthode qui peut nous aider dans des cas plus compliqués.

Posons

$$p(t) = Cz^t \tag{4}$$

où C et z sont des constantes quelconques.

L'équation (2) deviendra:

$$A_1 C z^{t-\theta} + B_1 C z^t = 0,$$

d'où l'on déduit que C est arbitraire, tandis que

$$A_1 z^{-\theta} + B_1 = 0.$$

On voit que seulement des z complexes satisferont à cette équation; l'argument de z peut être;

$$\frac{\pi}{\theta}, \frac{3\pi}{\theta}, \frac{5\pi}{\theta}, \text{ etc.,} \tag{5}$$

et

$$\frac{-\pi}{\theta}, \frac{-3\pi}{\theta}, \frac{-5\pi}{\theta}, \text{ etc.} \tag{6}$$

Comme dans cette étude nous nous bornerons aux cas où le mouvement est strictement périodique, cela signifie que, pour le problème sous considération, nous discuterons seulement le cas où $A_1 = B_1$. Il suit que z^t sera une fonction purement périodique, dont la période T peut être

$$2\theta, \tfrac{2}{3}\theta, \tfrac{2}{5}\theta, \cdots \text{ etc.}$$

En combinant des solutions (5) et (6) ayant une même valeur absolue de l'argument, on peut obtenir des solutions réelles, chose nécessaire pour une solution avec un sens économique.

L'équation (2) étant linéaire on voit sans peine que la solution réelle générale peut s'écrire dans la forme:

$$p(t) = \sum_0^\infty{}^k C_{2k+1} \cos \left[\frac{(2k+1)\pi t}{\theta} + \epsilon_{2k+1}\right],$$

où C_{2k+1} et ϵ_{2k+1} sont des constantes; cela veut dire que $p(t)$ sera une fonction périodique de la période 2θ, résultat concordant avec notre première solution.

3. Introduction de "spéculation simple"

Etudions maintenant l'influence d'une certaine forme de spéculation en introduisant à côté de la demande statique (1) une "demande spéculative." Cette demande spéculative peut, a priori, dépendre de manières très différentes du prix. Il me semble qu'il faut faire distinction entre plusieurs formes de spéculation au fur et à mesure que

(a) le mouvement du prix est connu ou inconnu;

(b) l'horizon économique[4] est court ou long; et

(c) le coût de l'emmagasinage est bas ou élevé. Il n'est pas l'intention de l'article présent de traiter ces questions; nous supposerons seulement

[4] C.à.d. la période pour laquelle le sujet économique fait ses projets.

que la "demande spéculative" soit de la forme suivante, que nous caractériserons par l'indication, "spéculation simple":

$$B_2\dot{p}(t) \equiv B_2 \frac{dp}{dt} \cdot$$

Les recherches du Department of Agriculture des États-Unis sur la spéculation sur le blé ont démontré que dans le cas des "petits spéculateurs" cette forme est une bonne approximation. La demande totale devient alors

$$B_0 - B_1 p(t) + B_2 \dot{p}(t),$$

forme introduite aussi par Amoroso[5] et par Roos et Evans.[6]

En utilisant maintenant la deuxième méthode de solution établie dans le §2, nous posons:

$$p = Cz^t.$$

On aura:

$$\dot{p} = Cz^t \log z,$$

et l'équation exprimant l'égalité de l'offre et de la demande devient

$$C(A_1 z^{t-\theta} + B_1 z^t - B_2 z^t \cdot \log z) = 0.$$

On en déduit que C est arbitraire et que z doit obéir à l'équation:

$$A_1 z^{-\theta} + B_1 - B_2 \log z = 0. \tag{7}$$

Il sera possible sans peine de trouver des solutions de cette équation. Pour une combinaison concrète quelconque de valeurs d'A_1, B_1, et B_2, une série infinie de solutions peut être indiquée, analoguement au cas (5), (6), avec des arguments montants. Nous appellerons solution "d'argument minimum" la solution dans une telle série dont l'argument a la valeur la moins élevée. Pour simplifier les discussions nous ne nous occuperons que des solutions,

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \text{“d'argument minimum.”} \\ (2) & \text{dont } |z| = 1. \end{array}\right\} \tag{8}$$

La justification de ces restrictions est la suivante:

(1) dans plusieurs cas pratiques il se montre que les solutions d'argument minimum sont, du point de vue économique, les plus im-

[5] Voir p.e. L. Amoroso, *Giornale degli Economisti* 1930, p 941.

[6] Voir p.e. G. C. Evans, The Dynamics of Monopoly, *Amer. Math. Monthly*, 1924, (XXXI). C. F. Roos, A Mathematical Theory of Competition, *Amer. J. of Math.*, 1925, (XLVII).

portantes; et (2) les solutions où $|z|$ diffère sensiblement de l'unité représentent des oscillations soit fortement amorties soit "explosives," qui dans la réalité ne sont pas encore observées très nettement. L'importance théorique de ces cas-là n'est pourtant pas du tout niée par le présent auteur.

La coïncidence des deux restrictions (8) exige déjà une relation entre A_1, B_1, et B_2; leur vrai sens est donc que nous ne considérons non seulement qu'une partie des solutions mais aussi qu'une partie des problèmes possibles.

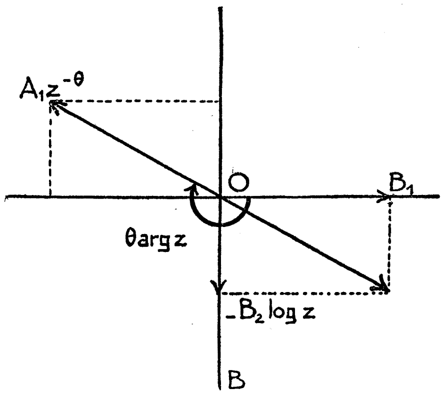

FIG. 1

La représentation graphique dans la Fig. 1 nous éclaircira la situation dans les problèmes en considération. Pour les nombres complexes on a:

$$\log z = \log|z| + i \arg z, \qquad i = \sqrt{-1}$$

ce qui devient dans notre cas

$$\log z = i \arg z.$$

Pour un argument positif de z, le terme $-B_2 \log z$ dans l'équation (7) sera représentée par un vecteur du sens OB, le terme $+B_1$ par le vecteur OB_1. Il suit que le vecteur représentant $A_1z^{-\theta}$ sera situé dans le second quadrant, d'où l'on tire la conclusion que

$$\pi < \theta \arg z < \frac{3\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\frac{4}{3}\theta < T < 2\theta, \tag{9}$$

T étant la période, de telle façon que, quand la spéculation simple est faible (c.à.d. B_2 petit), T diffère peu de 2θ et que l'augmentation d'intensité de cette spéculation diminue la valeur de T.

Les inégalités (9) ne sont pas seulement valides pour z, mais aussi pour les solutions réelles pour $p(t)$ qui y correspondent. On arrive à la proposition suivante: *l'introduction de spéculation simple raccourcit la période de l'oscillation.*

Il me semble être intéressant de rappeler la circonstance que la présence seule de la spéculation simple (sans qu'il y ait un délai entre le prix et l'offre) ne suffit pas pour générer des oscillations.

Remarque. On est mené à une équation de type similaire quand on entend par $A_0+A_1p(t-\theta)$ la quantité produite, par $B_0-B_1p(t)$ la quantité consommée d'un certain bien et quand on remplace la condition de l'égalité de ces deux quantités par une autre condition d'équilibre, à savoir que le stock du bien en considération est une fonction linéaire de $p(t)$, disons

$$- B_2p(t),$$

où B_2 est positif d'après les expériences dont on dispose. De cette dernière condition on conclut sans peine que l'augmentation du stock au moment t,

$$A_0 + A_1p(t - \theta) - B_0 + B_1p(t) = - B_2\dot{p}(t);$$

on a donc, puisque $A_0=B_0$,

$$A_1p(t - \theta) + B_1p(t) + B_2\dot{p}(t) = 0.$$

En posant $p(t)=Cz^t$ on obtient

$$A_1z^{-\theta} + B_1 + B_2 \log z = 0, \tag{10}$$

équation ne différant de (7) que par le signe du dernier terme. On en déduit que maintenant

$$\frac{\pi}{2} < \theta \arg z < \pi,$$

$$\text{c.à.d. que } 2\theta < T < 4\theta.$$

En appelant $1/B_2$ la "réagibilité du prix par rapport au stock" on voit donc:

(1) que dans le cas où quantité produite et quantité consommée sont toujours égales, cette réagibilité est infiniment grande, chose qui empêche toute oscillation des stocks; et (2) qu'une diminution de cette réagibilité tend à allonger la période d'oscillation des prix.

4. Demande hyperbolique

Comme introduction d'un cas plus compliqué il sera utile de considérer encore une fois le cas premier, sans spéculation, changé un petit peu par l'introduction d'une fonction de demande de la forme:

$$\frac{C}{P + p(t)}, \tag{11}$$

où C est une constante et le dénominateur représente le prix du bien considéré. On pourrait appeler C le pouvoir d'achat des consommateurs, en supposant que le bien en considération est le seul bien acheté.

L'égalité de l'offre et de la demande exige maintenant que

$$\{P + p(t)\}\{A_0 + A_1 p(t - \theta)\} = C. \tag{12}$$

Pour l'équilibre à la longue on aura $C = A_0 P$; nous supposerons que cette condition est remplie, d'où:

$$PA_1 p(t - \theta) + A_0 p(t) + A_1 p(t) p(t - \theta) = 0. \tag{13}$$

La présente équation n'est plus linéaire. La solution $p(t) = Cz^t$ n'est plus possible. Posons maintenant

$$p(t) = \sum_1^\infty {}^k\, C_k z^{kt},$$

où C_k sont des constantes.

$$\text{On aura: } p(t - \theta) = \sum_1^\infty {}^k\, C_k z^{kt - k\theta} \text{ et}$$

$$PA_1 \sum_1^\infty {}^k\, C_k z^{kt-k\theta} + A_0 \sum_1^\infty {}^k\, C_k z^{kt} + A_1 \sum_1^\infty {}^k \sum_1^\infty {}^l\, C_k C_l z^{(k+l)t - k\theta} = 0. \tag{14}$$

Cette équation doit être une identité en t pour chaque valeur de t; il faudra que tout coefficient de z^{kt} disparaisse; pour $k = 1$ on a:

$$C_1(PA_1 z^{-\theta} + A_0) = 0.$$

De cette équation on déduit qu'il y a deux possibilités:

(1) $\quad C_1$ est arbitraire $\neq 0$ et $z^{-\theta} = \dfrac{-A_0}{PA_1}$, (15)

ou

(2) $C_1 = 0$ et z est arbitraire. La signification de ce deuxième cas n'est qu'un remplacement de z par z^2; on peut donc y renoncer.

Grâce aux restrictions (7) nous ne considérerons que les cas où $A_0/PA_1=1$, et par conséquent

$$z^{-\theta}=-1. \quad (15')$$

Pour $k=2$, on a:

$$(PA_1z^{-2\theta}+A_0)C_2+A_1C_1^2z^{-\theta}=0,$$

ce qui devient à l'aide de (15'):

$$C_2=\frac{C_1^2}{2P}\cdot$$

Pour $k=3$ on a l'équation

$$C_3PA_1z^{-3\theta}+C_3A_0+A_1C_1C_2(z^{-\theta}+z^{-2\theta})=0,$$

prenant la forme

$$0C_3+0=0,$$

C_3 sera donc arbitraire, etc.

De cette manière il est possible de déterminer les constantes C_k par des équations successives, tandis que la première équation de la série, l'équation (15) ou (15'), nous donne la valeur de z et, par conséquent, la période de $p(t)$. En comparant le résultat obtenu avec celui du §2, nous voyons qu'aussi maintenant les constantes C_1, C_3, C_5, etc. peuvent être choisies arbitrairement (c. à. d. en accordance avec le mouvement initial, entre le moment 0 et le moment θ par exemple). Tandis que dans le cas du §2 les constantes C_2, C_4, etc. doivent être égales à zéro, dans le cas présent les valeurs de ces constantes obéissent aux équations

$$C_2=\frac{C_1^2}{2P},$$

$$C_4=\frac{2C_1C_3-C_2^2}{2P},$$

etc.

La période de z et de $p(t)$ est la même dans les deux cas, à savoir $T=2\theta$.

Remarque. Il est possible de réduire ce problème[7] à celui du §2, par les transformations suivantes. L'équation (13) devient, tenu compte de (15'):

$$b^2p(t)p(t-\theta)+b[p(t)+p(t-\theta)]=0, \quad (16)$$

où $b=1/P$.

[7] Je dois à M. le Prof. J. Droste, professeur de mathématiques à l'Université de Leyde, les indications suivantes.

Cela se transforme en:

$$[bp(t) + 1][bp(t - \theta) + 1] = 1,$$

$$\log [bp(t) + 1] = - \log [bp(t - \theta) + 1].$$

En posant $\log [bp(t)+1]=\omega(t)$, on a:

$$\omega(t) = - \omega(t - \theta),$$

équation de la forme (2); la solution générale de cette équation sera:

$$\omega(t) = \sum_0^\infty {}^k \; C_{2k+1} \; z^{(2k+1)t},$$

d'où

$$p(t) = \frac{1}{b}[e^{\Sigma C_{2k+1} z^{(2k+1)t}} - 1].$$

Le développement en série de cette fonction en puissances de z^t mène aux coefficients trouvés ci-dessus.

5. Bien de consommation; "marché fermé"

Supposons maintenant que le pouvoir d'achat C n'est pas une constante, mais dépend de l'activité même de la branche considérée. Supposons de plus que le procédé de production demande à chaque moment de sa durée θ le même nombre d'ouvriers. En tenant compte du fait que les ouvriers travaillant au moment t préparent l'offre pour la période de t à $t+\theta$, le nombre occupé dans la branche (l'"activité") sera

$$N = \alpha \int_{t-\theta}^{t} d\tau [A_0 + A_1 p(\tau)]. \tag{17}$$

Le salaire par unité de temps étant S, le pouvoir d'achat sera SN et l'équation (12) se transforme en

$$[P + p(t)][A_0 + A_1 p(t - \theta)] = S\alpha \int_{t-\theta}^{t} d\tau [A_0 + A_1 p(\tau)].$$

Pour l'équilibre à la longue on aura $PA_0=\alpha S\theta A_0$, d'où $S\alpha=P/\theta$; il reste:

$$A_0 p(t) + A_1 p(t - \theta)p(t) + PA_1 p(t - \theta) = \frac{PA_1}{\theta} \int_{t-\theta}^{t} d\tau p(\tau) \cdots \tag{18}$$

C'est de nouveau une équation fonctionnelle non-linéaire; nous posons de nouveau $p(t) = \sum_1^\infty {}^k C_k z^{kt}$. On a:

$$\int_{t-\theta}^{t} d\tau A_1 p(\tau) = A_1 \sum_1^{\infty} {}^k \frac{C_k z^{kt}}{k \log z}(1 - z^{-k\theta});$$

l'équation (18) se transforme en:

$$A_0 \sum_1^{\infty} {}^k C_k z^{kt} + A_1 \sum {}^k \sum {}^l C_k C_l z^{kt-k\theta+lt} + PA_1 \sum {}^k C_k z^{kt-k\theta}$$

$$= \frac{PA_1}{\theta} \sum {}^k \frac{C_k z^{kt}}{k \log z}(1 - z^{-k\theta}).$$

De cette équation on déduit, comme dans le §4, une série d'équations successives, dont la première nous donne la valeur de z, et les suivantes la valeur des constantes C_1, C_2, etc. Comme nous nous intéressons principalement à la période de z, nous ne discuterons que la première équation. Elle est, après division par C_1 qui paraît être arbitraire,

$$1 - z^{-\theta} = \left[\frac{A_0}{PA_1} + z^{-\theta}\right] \theta \log z. \tag{19}$$

Grâce aux restrictions (8) que nous nous imposons, nous ne considérons que les cas où $A_0/PA_1 = 1$ et l'on a donc:

$$\frac{1 - z^{-\theta}}{1 + z^{-\theta}} = \theta \log z.$$

Le premier membre se transforme, comme l'on voit facilement à l'aide d'une figure géometrique du plan complexe, en

$$i \operatorname{tg} \frac{\theta \arg z}{2} \text{ ; on a donc:}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta \arg z}{2} = \theta \arg z,$$

d'où suit, pour la solution qui nous intéresse:

$$\frac{\theta \arg z}{2} = 66 \text{ à } 67°,$$

et

$$T = 2.7\theta \text{ environ.} \tag{20}$$

Ce résultat signifie que la dépendence du pouvoir d'achat de l'activité de la branche elle-même, c'est à dire le fait que le marché est fermé, mène à une période prolongée des oscillations.

Remarque. La question reste si la solution posée $p = \sum Cz^t$ est la solution générale.

6. Bien de consommation de longue durée

Jusqu' ici nous avons supposé que la durée de la consommation du bien considéré peut être négligée; dans le paragraphe présent cette restriction sera abandonnée: soit cette durée de η unités de temps.[8] Il sera utile dans ce cas, d'entendre par p le loyer (pour un navire p.e. le fret), et d'étudier le marché du louage du bien. (Le prix d'achat sera à peu près proportionnel au prix de louage).

Pour ce marché l'offre se constitue de la production de toute une période η; en admettant que cette production soit donnée par la même fonction que l'offre dans le cas (1), on aura pour l'offre à notre marché:

$$\eta A_0 + A_1 \int_{t-\theta-\eta}^{t-\theta} p(t)dt, \tag{21}$$

En prenant pour la demande la fonction

$$B_0 - B_1 p(t),$$

l'équation de l'équilibre au moment t sera:

$$A_1 \int_{t-\theta-\eta}^{t-\theta} p(t)dt = - B_1 p(t).$$

Nous posons de nouveau $p(t) = Cz^t$; on trouvera de la même manière que dans le §2 que C est arbitraire et que

$$\frac{A_1}{B_1}(z^{-\theta} - z^{-\theta-\eta}) + \log z = 0.$$

La restriction $|z| = 1$ demande que log z, et, par conséquent, $z^{-\theta} - z^{-\theta-\eta}$ soit purement imaginaire, d'où suit que

$$\arg z = \frac{2\pi}{2\theta + \eta},$$

ou

$$T = 2\theta + \eta. \tag{22}$$

On voit que pour $\eta \equiv 0$, la formule antérieure est retrouvée; pour $\theta << \eta$ on peut écrire $T = \eta$, indiquant que la durée de consommation est à peu près égale à la période des oscillations. Cette relation sert de base à la théorie du mouvement cyclique général de De Wolff.[9]

[8] Comme on le verra les considérations suivantes sont aussi valables pour les biens instrumentaux (moyens de production).

[9] Voir S. de Wolff, *Het economisch getij*, Amsterdam, 1929 (J. Emmering), p. 415–419.

7. Bien de consommation de longue durée; marché fermé

Maintenant il est facile de combiner les cas des §§5 et 6 en considérant le marché d'un bien de consommation de longue durée où le pouvoir d'achat des acheteurs jaillit de l'activité de la branche elle-même. Selon les principes exposés plus haut on aura:

$$\left[A_0\eta + \int_{t-\eta-\theta}^{t-\theta} A_1 p(\tau)d\tau\right][P + p(t)] = l\left[A_0\theta + \int_{t-\theta}^{t} A_1 p(\tau)d\tau.\right]$$

En indiquant la première intégrale par T_1, la deuxième par T_2, et A_0/A_1 par a, on a:

$$a\eta p(t) + p(t)T_1 + PT_1 = lT_2. \tag{23}$$

La manière la plus simple d'obtenir une solution me semble être maintenant de poser

$$\int^{t} p(\tau)d\tau = \sum_{1}^{\infty}{}^{k} C_k z^{kt}.$$

On en déduit:

$$p(t) = \sum_{1}^{\infty}{}^{k} k \log z \cdot C_k z^{kt},$$

$$T_1 = \sum_{1}^{\infty}{}^{k} C_k z^{kt-k\theta}(1 - z^{-k\eta}), \quad T_2 = \sum_{1}^{\infty}{}^{k} C_k z^{kt}(1 - z^{-k\theta}).$$

L'équation (23) devient:

$$a\eta \sum{}^{k} k \log z \cdot C_k \cdot z^{kt} + \sum{}^{k} \sum{}^{l} k \log z C_k C_l z^{kt+lt-l\theta}(1 - z^{-l\eta}) + \sum{}^{k} PC_k z^{kt-k\theta}(1 - z^{-k\eta}) = l \sum{}^{k} C_k z^{kt}(1 - z^{-k\theta}). \tag{24}$$

La première des équations suivant cette identité en z^t nous donne

$$a\eta \log z + Pz^{-\theta}(1 - z^{-\eta}) = l(1 - z^{-\theta}),$$

ou

$$\frac{a}{P}\log z + \frac{1}{\eta}(z^{-\theta} - z^{-\theta-\eta}) + \frac{1}{\theta}(z^{-\theta} - 1) = 0.$$

Le premier terme de cette équation n'ayant pas, selon nos restrictions (8), de componente réelle, il faut que la componente réelle du deuxième terme soit l'opposé de celle de la troisième. Cela posé il n'est pas difficile de trouver, pour un rapport quelconque de θ et η, le rapport entre T et θ. Ce rapport-là n'est pas tout à fait constant. Pour $\eta \leqq 10\theta$ on a par approximation:

$$T = 2.7\theta + 1.3\eta. \tag{25}$$

Pour $\eta \gg \theta$ on a $\lim_{\theta=0} \dfrac{T}{\eta} = 1$.

On voit de nouveau que, comparé au cas précédent, il y a un prolongement de la période à cause de la "fermeture" du marché. On voit de plus que pour $\eta = 0$, notre formule correspond au numéro (20).

8. Marchés liés

La méthode développée dans les paragraphes précédents peut être employée aussi dans des cas où l'on considère plusieurs marchés liés entre eux, comme les marchés des divers biens de consommation (liaison horizontale) ou les marchés d'un produit fini et des demifabricats et des matières premières, employés dans le procédé de sa production (liaison verticale). Dans cet article je me borne à un seul exemple de cet espèce, à savoir au cas d'une liaison verticale de deux marchandises I et II, I étant la matière première de II. On aura le schéma suivant:

Marché I: Prix $P + p(t)$; offre: $A_0 + A_1 p(t - \theta')$
demande: $B_0 + B_1 [q(t) - p(t)]$.
Marché II: Prix $Q + q(t)$; offre: $B_0 + B_1 [q(t - \theta'') - p(t - \theta'')]$
demande: $C_0 - C_1 q(t)$.

Comme unité de poids des deux marchandises on a pris des quantités correspondantes, de sorte que la production de l'unité de II demande une unité de I. Les frais de production ont été supposés constants. La forme de l'offre de II a été choisie telle qu'il n'y ait pas d'emmagasinage. Le délai entre le prix et l'offre est θ' pour marché I, θ'' pour le marché II.

On aura: $A_0 = B_0 = C_0$ et du reste:

$$A_1 p(\underbrace{t - \theta' - \theta'') = B_1 [q(t - \theta'')}_{\text{(équilibre au moment } t - \theta'')} - \underbrace{p(t - \theta'')] = - C_1 q(t)}_{\text{(équilibre au moment } t)},$$

Posons $p(t) = k' z^t$ et $q(t) = k'' z^t$; on aura:

$$A_1 k' z^{-\theta' - \theta''} = B_1 (k'' - k') z^{-\theta''} = - C_1 k''.$$

Les inconnues sont maintenant $k = k''/k'$ et z, des quantités complexes toutes les deux.

En éliminant k l'équation restante pour z sera:

$$\frac{1}{A_1} + \frac{z^{-\theta'}}{B_1} + \frac{z^{-\theta' - \theta''}}{C_1} = 0. \tag{26}$$

A_1, B_1, et C_1 étant des constantes positives, on verra sans peine à l'aide d'une figure géométrique du plan complexe que la possibilité de satisfaire à l'équation (26) n'existe que quand

$$\arg z \geqq \frac{\pi}{\theta' + \theta''};$$

il suit que

$$T \leqq 2(\theta' + \theta''), \tag{27}$$

où le signe inférieur n'est valable que quand $B_1 = \infty$.

Une réunion de ces deux marchés, de sorte que la production de la matière première et du produit fini sont exercées par les mêmes personnes, nous ramènerait au cas du §2, $\theta'+\theta''$ de (27) ayant la même signification que θ antérieurement. Il est remarquable que cette réunion signifie, selon (27), en même temps un ralentissement du mouvement oscillatoire.

9. Résumé des résultats

A. Période des oscillations.—

No.	Nombre des Marchés	Durée de la production	Durée de la con-somm.	Spécu-lation	Pouvoir d'achat des con-somm.	Période de l'oscillation	Re-mar-ques
1	1	θ	0	sans	const.	$T=2\theta$	—
2	1	θ	0	avec	const.	$1{,}33\theta<T<2\theta$	(1)
3	1	θ	0	sans	(2)	$T\backsimeq 2.7\theta$	(1)
4	1	θ	η	sans	const.	$T=2\theta+\eta$	(1)
5	1	θ	η	sans	(2)	$T\backsimeq 2.7\theta+1.3\eta$	(1)
6	2	θ', θ''	0	sans	const.	$T\leqq 2(\theta'+\theta'')$	—

(1) Seulement pour les oscillations strictement périodiques (pas amorties ou "explosives").
(2) Proportionnel à l'activité de la branche.

B. Forme des oscillations.—Le degré d'amortissement dépend en général des élasticités qui jouent un rôle dans le problème. La forme de l'oscillation pendant une période dépend d'un mouvement initial; le mécanisme de la propagation n'a qu'une influence indirecte: elle défend quelques formes spéciales, p.e. la forme sinusoidale, quand l'équation de la propagation n'est pas linéaire.

C. Les différences de phase entre le prix, l'activité et l'offre dans le "baromètre" du marché considéré.—Par une définition de l'"activité" comme celle donnée dans le §5 on rend possible la construction d'un baromètre indiquant le mouvement du prix et de l'activité dans leur succession caractéristique. Ces baromètres ont été construits dans la Fig. 2.

D. Remarque finale.—Il est évident qu'un nombre immense de problèmes a été négligé dans les considérations précédentes, et qu'un dé-

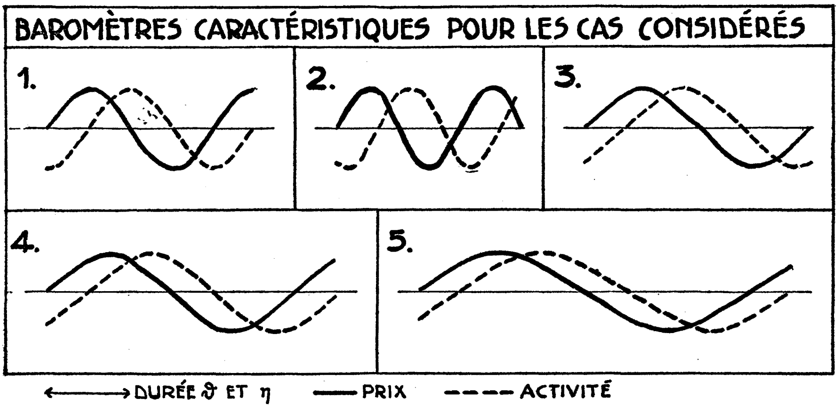

Fig.2.

veloppement en des sens bien divers est bien nécessaire avant que la discipline des oscillations économiques ait une base solide.

Scheveningen, Hollande