Het bepalen van de optimale verkoopprijs met behulp van dynamische programmering

B. Wierenga

1. Inleiding

In het volgende zal aan de orde worden gesteld: het vraagstuk van de optimale prijsstelling in de situatie, waarin een aanbieder, die gedurende een aantal achtereenvolgende perioden een produkt wil verkopen, aan het begin van iedere periode zijn verkoopprijs moet vaststellen. Hierbij is verondersteld, dat de verkoopprijs niet alleen de vraag beïnvloedt in de periode waarvoor de prijs geldt, maar ook de vraag in de perioden daarna.

Er zal worden aangegeven hoe – onder bepaalde veronderstellingen – dit probleem kan worden opgelost met behulp van dynamische programmering.

Een en ander zal worden gedemonstreerd aan een voorbeeld over boter.

2. Nadere probleemstelling

Als de prijs alleen invloed heeft op de vraag in de lopende periode is de optimale prijs voor elke periode op eenvoudige wijze te berekenen, n.l. met behulp van:

$$MO = \frac{\delta\ Q_i P_i}{\delta\ P_i} = \frac{\delta\ Q_i}{\delta\ P_i} \cdot M.C. \tag{1}$$

Hier is: MO = marginale opbrengst
MC = marginale kosten (toename van de kosten bij uitbreiding met 1 eenheid produkt)
Q_i = gevraagde hoeveelheid in periode i
P_i = verkoopprijs in periode i

Als Q_i bekend is als funktie van P_i en bovendien MC (doorgaans afhankelijk van Q_i en dus van P_i) gegeven is, kan de optimale prijs voor elke periode i bepaald worden. Hierbij nemen we aan, dat Q_i alleen verandert onder invloed van P_i. De invloed van de andere elementen van de marketing mix, zoals bijv. reklame en die van de konkurrentie worden dus konstant verondersteld. Deze aannamen zullen we in het vervolg van dit artikel handhaven.

Het bovenstaande zal in het algemeen echter niet overeenstemmen met de werkelijkheid: een prijs, geldend voor een bepaalde periode, zal ook invloed hebben op de vraag daarna. O.a. Koyck (2) heeft zich met dit verschijnsel van vertraagde reakties op ekonomische variabelen beziggehouden. Hij noemt een aantal mogelijke oorzaken hiervoor; deze kunnen op het technische, het institutionele, maar vooral ook op het psychologische vlak liggen. Bij het reageren van de vraag naar konsumentengoederen op de prijs zal vooral dit laatste belangrijk zijn. Het duurt een tijd, voordat een prijsverandering 'doorkomt'. Ook spelen hier gebruiksgewoonten een grote rol.

De doorwerkende prijsinvloed kan op 2 manieren in een model worden weergegeven:

a. De vraag in de periode i wordt rechtstreeks beïnvloed door de prijs in voorgaande perioden:

$$Q_i = f(P_i, P_{i-1}, P_{i-2}, \ldots) \qquad (2)$$

b. De vraag in de periode i is afhankelijk van de verkochte hoeveelheden in voorgaande perioden. (Deze hoeveelheden zullen weer beïnvloed zijn door de bijbehorende prijzen):

$$Q_i = f(P_i, Q_{i-1}, Q_{i-2}, \ldots) \qquad (3)$$

Wij zullen ons voorlopig beperken tot een vertraging van 1 periode: we veronderstellen dat alleen de prijs in de voorgaande periode nog invloed heeft. Verder nemen we in (2) en (3) een lineair verband aan.

We krijgen dan als vergelijkingen voor de vraag:

$$Q_i = \alpha_0 + \alpha_1 P_i + \alpha_2 P_{i-1} \qquad (4)$$

en

$$Q_i = \beta_0 + \beta_1 P_i + \beta_2 Q_{i-1} \qquad (5)$$

Het gaat er nu om, bij het begin van elke periode (i) die prijs in te stellen, die – gezien de prijs in de voorgaande periode (i – 1) en de implicatie voor de volgende periode (i + 1) – optimaal is. We kunnen dit probleem nu formuleren als een dynamisch programmeringsprobleem.

3. Dynamische programmering

Een algemene formulering van een dynamisch programmeringsprobleem is de volgende (zie o.a. Bellman (1)).

We hebben een *systeem* waarbij we op equidistante tijdstippen ingrijpen. We hebben daartoe op ieder van die tijdstippen een beslissing te nemen, hoe we zullen ingrijpen. Naast het systeem definiëren we: de *toestand* van het systeem. De beslissing die we op elk van de beslissingstijdstippen zullen nemen, hangt af van de toestand op die tijdstippen. De oplossing van zo'n dynamisch programmeringsprobleem, zal zijn: een strategie, die voor iedere mogelijke toestand op elk beslissingstijdstip een beste beslissing voorschrijft.

Formuleren we nu het bovenstaande prijsstellingsprobleem als dynamisch programmeringsprobleem, dan definiëren we:

Systeem: het verkopen van een produkt in een aantal achtereenvolgende perioden.

Toestand: de prijs resp. verkochte hoeveelheid in de voorgaande periode. (Afhankelijk van of we model (4) of (5) kiezen).

Als beslissingstijdstippen worden hier gekozen: het begin van elke verkoop-periode. Laten deze tijdstippen als volgt zijn genummerd: 1, 2, . ., t, . . ., N. We nemen dus aan dat het produkt gedurende een N-tal perioden zal worden verkocht. De toestand op het beslissingstijdstip t – aan te geven door S_t – is dus:

bij model (4): De prijs die gegolden heeft in de periode (t – 1, t) – aan te geven door P_{t-1}.

bij model (5): De verkochte hoeveelheid in de periode (t – 1, t) – aan te geven door Q_{t-1}.

De beslissing die op het tijdstip t moet worden genomen is de bepaling van de verkoopprijs voor de periode (t, t + 1). Deze prijs noemen we P_t.

We hebben dit probleem opgelost als we een strategie hebben verkregen, die voor elk beslissingstijdstip een beste beslissing t.a.v. P_t voorschrijft voor elke mogelijke waarde van de toestandsgrootheid S_t. Deze beslissing is de beste in die zin, dat de totale opbrengst over alle nog volgende perioden maximaal is bij de door de strategie aangegeven P_t, als ook voor alle volgende perioden optimaal zal worden beslist.

De recurrente betrekking, zoals die steeds optreedt bij een dynamisch programmeringsprobleem is hier de volgende:

$$f_t\,(S_t) = \max_{P_t}.\ \{h_t\,(S_t, P_t) + f_{t+1}\,(S_{t+1})\}_{t=1,\ldots,N} \tag{6}$$

f_{N+1}

Hierbij is $f_{t+1}\,(S_{t+1})$ de maximale opbrengst vanaf het tijdstip (t + 1) als er vanaf dat tijdstip steeds optimaal wordt beslist. $h_t\,(S_t, P_t)$ is de opbrengst in de lopende periode, dus in het interval (t, t + 1). Dit wordt vaak de direkte opbrengst genoemd. $f_t\,(S_t)$ is de maximale opbrengst vanaf tijdstip t, als er vanaf dat tijdstip optimaal wordt beslist. Tussen S_{t+1} enerzijds en S_t en P_t anderzijds zal een verband bestaan. In ons model is aangenomen dat P_t en S_t S_{t+1} volledig bepalen, in zo'n geval spreekt men van een deterministisch dynamisch programmeringsprobleem. Wij zullen verder aannemen dat de direkte opbrenstfunktie h_t voor alle t dezelfde gedaante heeft, n.l. die welke af te leiden is uit (4) resp. (5) en de kostenfunktie. We kunnen nu de recurrente betrekking als volgt nader specificeren:

Voor model (4) : (Hier is $S_t = P_{t-1}$)

$$f_t(P_{t-1}) = \max_{P_t} \{\underbrace{(\alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1}) P_t - K(Q_t)}_{h_t(S_t,\, P_t)} + f_{t+1}(P_t)\} \qquad t=1, \ldots, N \tag{7}$$

Voor model (5): (Hier is $S_t = Q_{t-1}$)

$$f_t(Q_{t-1}) = \max_{P_t} \{\underbrace{(\beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Q_{t-1}) P_t - K(Q_t)}_{h_t(S_t,\, P_t)} + f_{t+1}\underbrace{(\beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Q_{t-1})}_{Q_t}\} \qquad t=1, \ldots, N \tag{8}$$

Bij (7) en (8): $f_{N+1} = 0$.

Hier is $K(Q_t)$ = totale kosten als funktie van Q_t.
Via (4) en (5) kan $K(Q_t)$ geschreven worden als funktie van P_t en de toestandsgrootheid: P_{t-1} resp. Q_{t-1}.

We kunnen dus de te maximaliseren grootheid steeds schrijven als funktie van P_t en de toestandsgrootheid.

In de oplossing zullen we dan ook de optimale P_t vinden als een funktie van de toestandsgrootheid.

Als nu de parameters van de vergelijkingen (4) en (5) en de kostenvergelijking $K(Q_t)$ bekend zijn, is de optimale P_t ($t = 1, \ldots, N$) te berekenen.

De oplossing van dit dynamisch programmeringsprobleem wordt verkregen door te beginnen met de bepaling van de optimale P_N. Omdat N de laatste verkoopperiode is, hoeft nu geen rekening te worden gehouden met het effekt van de in te stellen prijs op de vraag 1 periode later: $f_{N+1} = 0$.

De optimale P_N wordt dus gevonden door $h_N(S_N, P_N)$ te maximaliseren naar P_N, wat kan geschieden door te differentiëren naar P_N. (Hierbij zal $h_N(S_N, P_N)$ aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen: er moet een maximum zijn). Aldus wordt P^*_N (optimaal) gevonden als funktie van S_N. Door deze P^*_N in te vullen in $h_N(S_N, P_N)$, wordt ook $f_N(S_N)$ gevonden. Hierna kan P_{n-1} worden berekend: Alle elementen van de te maximaliseren vorm zijn bekend ($f_{t+1}(S_{t+1})$ is hier de zojuist gevonden $f_N(S_N)$).

Door op deze wijze achteruit te werken, kunnen de optimale verkoopprijzen voor de andere perioden, steeds verder van N verwijderd, worden berekend.

Een en ander zal worden gedemonstreerd aan het onderstaande voorbeeld.

Opmerkingen. Bij de formulering van het dynamisch programmeringsprobleem als in (6), (7) en (8) wordt het maximum telkens zodanig berekend dat de direkte opbrengst: $h(S_t, P_t)$ en de toekomstige baten: $f_{t+1}(S_{t+1})$ even zwaar wegen. Het is echter in de ekonomie gebruikelijk om direkte opbrengsten hoger te waarderen dan toekomstige, dit vanwege de rente die een direkte opbrengst onmiddellijk kan gaan opleveren, de onzekerheid verbonden aan een toekomstige opbrengst, etc. Dit kan worden ingebouwd door de toekomstige opbrengst te disconteren met een bepaalde faktor d. De formule voor $f_t\ (S_t)$ wordt dan:

$$f_t\ (S_t) = \max_{P_t}.\ \{h_t\ (S_t,\ P_t) + df_{t+1}\ (S_{t+1})\}_{t=1,\ \dots,\ N} \tag{9}$$

waarbij $0 \leq d \leq 1$

Het probleem is in het voorgaande steeds zo gesteld, dat de aanbieder zijn produkt gedurende een beperkt van te voren vaststaand aantal perioden wil verkopen. In de praktijk zal het echter meestal zo zijn, dat van te voren niet vaststaat hoelang het produkt op de markt zal blijven, we kunnen dan alleen zeggen dat het de bedoeling is, dat het produkt gedurende een groot aantal perioden achtereen zal worden verkocht. We hebben dan in principe te doen met een zg. oneindig-staps dynamisch programmeringsprobleem. We kunnen zo'n probleem echter vaak oplossen door het te beschouwen als een N-staps dynamisch programmeringsprobleem. Als we dan N laten toenemen, convergeert de optimale oplossing onder algemene voorwaarden naar een vaste waarde, waarmee de oplossing voor het oneindig-staps probleem gevonden is. Ook dit zal in het voorbeeld worden gedemonstreerd.

Bij dynamische programmering kennen we het zogenaamde optimaliteitsprincipe. Dit houdt in, dat de optimale strategie zodanig is, dat als we vanaf een bepaald tijdstip deze toe gaan passen, we vanaf dat moment optimaal beslissen. Het doet er niet toe hoe er van te voren is beslist. Dit is een erg plezierige eigenschap; het betekent voor ons geval, dat als om de een of andere reden in een periode de prijs of de verkochte hoeveelheid heel anders is uitgevallen dan was verwacht, we toch gewoon de betreffende toestandsgrootheid (prijs of hoeveelheid) in kunnen vullen in de vergelijking van de optimale prijs voor de volgende periode. We beslissen vanaf dat moment weer optimaal. Hadden we langs analytische weg de optimale prijzen voor een aantal achtereenvolgende perioden berekend (wat in een deterministisch model altijd kan), dan hadden we op dat moment de hele berekening moeten herhalen.

4. Voorbeeld

Met behulp van vergelijkingen voor de vraag naar boter in Nederland kan op de boven aangegeven wijze de optimale boterprijs worden berekend (onder de aannamen genoemd in 2). Verder wordt aangenomen dat de marginale kosten van de boter nul zijn, een veronderstelling die in de huidige overschotsituatie reëel lijkt. De funktie K (Q_t) verdwijnt daardoor uit de formules (7) en (8). De verkoopperioden hebben hier de lengte van 1 jaar; er wordt dus aangenomen dat aan het begin van ieder jaar de verkoopprijs moet worden vastgesteld.

Uit de gegevens van het N.I.A.M.*-konsumentenpanel over de jaren 1958-1968 zijn met behulp van de kleinste kwadratenmethode de vergelijkingen van de vraag naar boter als volgt geschat:

a) $Q_t = 534{,}000 - \underset{(\pm 0{,}236)}{2{,}218}\, P_t - \underset{(\pm 0{,}321)}{1{,}272}\, P_{t-1} \qquad R^2 = 0{,}964$ (10)
d (Durbin-Watson) = 2,27

b) $Q_t = 376{,}830 - \underset{(\pm 0{,}434)}{2{,}533}\, P_t + \underset{(\pm 0{,}163)}{0{,}333}\, Q_{t-1} \qquad R^2 = 0{,}918$ (11)
d(Durbin-Watson) = 2,23

Hierbij is Q_t = totale boterkonsumptie per jaar in kg/100 personen
P_t = prijs in centen/250 g, gedefleerd op basis: 1959/60 = 100.

a. We zullen nu eerst de procedure uitvoeren, voor het geval dat $S_t = P_{t-1}$ dus met behulp van (7) en (10). We beginnen met de laatste stap:

$$f_N(P_{N-1}) = \max_{P_N} \{(534{,}000 - 2{,}218\, P_N - 1{,}272\, P_{N-1})\, P_N\}$$

$$\rightarrow \quad P^*_N = 120{,}379 - 0{,}287\, P_{N-1}$$

Dit ingevuld geeft: $f_N(P_{N-1}) = 32141{,}118 - 153{,}122\, P_{N-1} + 0{,}1823\, P^2_{N-1}$

Stap N–1: $f_{N-1}(P_{N-2}) = \max_{P_{N-1}} \{(534{,}000 - 2{,}218\, P_{N-1} - 1{,}272\, P_{N-2})\, P_{N-1} + 32141{,}118 - 153{,}122\, P_{N-1} + 0{,}1823\, P^2_{N-1}\}$

$$\rightarrow P^*_{N-1} = 93{,}550 - 0{,}312\, P_{N-2}$$

$$f_N(P_{N-2}) = 49956{,}646 - 118{,}995\, P_{N-2} + 0{,}199\, P^2_{N-1}$$

Op deze wijze kan steeds een stap terug worden gegaan en wordt voor ieder jaar de optimale prijs gevonden als funktie van de prijs in het voorafgaande jaar.

Bij het bovenstaande werd geen diskontering toegepast. De optimale prijzen werden ook bepaald met een diskonteringsfaktor: d = 0,9.

De resultaten zijn in de volgende tabel weergegeven.

(De vergelijking voor P^*_t is van de gedaante: P^*_t = konstante + coëfft. P_{t-1}).

	Geen diskontering		d = 0,9	
t	konstante	coëff. v. P_{t-1}	konstante	coëff. v. P_{t-1}
N	120,379	— 0,287	120,379	— 0,287
N- 1	93,550	— 0,312	96,448	— 0,310
N- 2	102,760	— 0,315	103,775	— 0,312
N- 3	99,938	— 0,315	101,783	— 0,312
N- 4	100,832	— 0,315	102,348	— 0,312
N- 5	100,550	— 0,315	102,190	— 0,312
N- 6	100,639	— 0,315	102,234	— 0,312
N- 7	100,612	— 0,315	102,222	— 0,312
N- 8	100,620	— 0,315	102,225	— 0,312
N- 9	100,617	— 0,315	102,224	— 0,312
N-10	100,618	— 0,315	102,225	— 0,312
N-11	100,618	— 0,315	102,224	— 0,312
N-12	100,618	— 0,315	102,224	— 0,312

* N.I.A.M. = Nederlands Instituut voor Agrarisch Marktonderzoek.

Voor elk jaar, dat een bepaald aantal jaren een N voorafgaat (N is het begintijdstip van het laatste jaar, dat er boter verkocht wordt), kan met behulp van deze parameters de optimale prijs berekend worden, als de prijs in het voorafgaande jaar bekend is. Nu zal bij boter de N ver verwijderd zijn, het ligt ongetwijfeld in de bedoeling nog gedurende een groot aantal jaren boter te verkopen. Wij zijn hier dus vooral geïnteresseerd in de vergelijking voor de optimale prijs, een groot aantal perioden voor N.

Het blijkt dat naarmate we teruggaan de parameters vrij snel convergeren; als we van plan zijn nog minstens 11 jaar boter te verkopen is de vergelijking voor de optimale prijs dus (zonder diskontering):

$$P^*_t = 100{,}618 - 0{,}315\ P_{t-1}$$

Als we werken met een disconteringsfaktor blijkt, dat de optimale prijs steeds iets hoger is. Dit was ook te verwachten, immers een hogere prijs nu heeft een negatief effekt op de verkoop in de toekomst, maar bij diskontering weegt die toekomst minder zwaar dan bij gelijke waardering van direkte en toekomstige opbrengsten.

b. De procedure kan ook worden uitgevoerd voor het geval dat $S_t = Q_{t-1}$, dus met behulp van (8) en (11).

Hier is de vergelijking van P_t^* van de vorm:

$$P^*_t = \text{konstante} + \text{coëfft. } Q_{t-1}$$

De resultaten zijn:

t	Geen diskontering konstante	Geen diskontering coëff. v. Q_{t-1}	d = 0,9 konstante	d = 0,9 coëff. v. Q_{t-1}
N	74,384	0,066	74,384	0,066
N-1	59,535	0,064	61,059	0,064
N-2	56,890	0,064	58,943	0,064
N-3	56,389	0,064	58,617	0,064
N-4	56,399	0,064	58,567	0,064
N-5	56,386	0,064	58,560	0,064
N-6	56,383	0,064	58,558	0,064
N-7	56,383	0,064	58,558	0,064

Hier blijkt de convergentie iets sneller te gaan. Als het de bedoeling is, dat er nog minstens 7 jaar boter zal worden verkocht, is de vergelijking voor de optimale boterprijs:

$$P^*_t = 56{,}383 + 0{,}064\ Q_{t-1} \text{ (geen diskontering)}$$

We kunnen nu b.v. voor 1969 de optimale prijs bepalen. Gegeven is $P_{1968} = 120$; $Q_{1968} = 140{,}9$.

Met behulp van het resultaat onder a. volgt hieruit:

$$P^*_{1969} = 100{,}618 - 0{,}315 \cdot 120 = 62{,}818$$

Met behulp van het resultaat onder b.:

$$P^*_{1969} = 56{,}383 + 0{,}064 \,.\, 140{,}9 = 65{,}401$$

Het blijkt, dat de aldus langs 2 verschillende wegen berekende lange termijnprijzen elkaar niet veel ontlopen. Het doet er hier kennelijk niet veel toe of we voor de toestandsgrootheid, die de vertraagde prijsinvloed 'doorgeeft', de prijs uit het voorafgaande jaar zelf nemen (P_{t-1}), dan wel de erbij behorende verkochte hoeveelheid (Q_{t-1}).

In dit voorbeeld is dus aangegeven, hoe een beslissingsvoorschrift kan worden ontwikkeld, waarmee aan het begin van elke periode de optimale prijs voor die periode kan worden bepaald, als de prijs resp. de verkochte hoeveelheid in de voorgaande periode bekend is.

Men realisere zich, dat dit gedaan is onder de aannamen, genoemd in 2. Bovendien is verondersteld dat de parameters van de vraagvergelijking van boter gedurende minstens 10 jaar konstant zullen blijven, hetgeen in werkelijkheid wel betwijfeld moet worden. Bovendien is het de vraag of de kosten dan nog mogen worden verwaarloosd. Het bovenstaande is dan ook alleen als voorbeeld bedoeld.

5. Uitbreidingen

Meer variabelen

Het is mogelijk, dat naast de prijs meer variabelen opgevoerd dienen te worden om de vraag te verklaren, b.v. het Inkomen. Dit is in het model in te passen. Er moet dan een prognose worden gemaakt t.a.v. het inkomen in de toekomstige perioden. De optimale prijs is dan n.l. tevens een funktie van het inkomen in de toekomstige perioden.

Vertraging over meer perioden

Het kan voorkomen dat Q_t behalve van P_{t-1} ook afhangt van P_{t-2}, P_{t-3}, etc. De procedure is dan analoog: we hebben dan meer toestandsgrootheden: P_{t-1}, P_{t-2}, P_{t-3}, etc., en de optimale P_t zal dan ook een funktie zijn van deze P_{t-1}, P_{t-2}, P_{t-3}, etc.

Stochastisch maken van het model

In het bovenstaande is steeds een deterministisch model gehanteerd: als bijv. P_t en P_{t-1} bekend zijn, wordt verondersteld, dat Q_t vastligt. In werkelijkheid is Q_t een stochastische grootheid en wij hebben steeds gewerkt met de verwachtingswaarde daarvan. Zou het mogelijk zijn de kansverdeling van Q_t bij vaste P_t en P_{t-1} te vinden, dan zouden we deze direkt in de formules (7) en (8) kunnen brengen en aldus telkens de verwachtingswaarde van de opbrengst maximaliseren. We hebben dan te doen met een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem, waarvan de oplossing vrijwel analoog aan die van een deterministisch probleem verloopt. Het vinden van deze kansverdelingen zal echter in de praktijk geen eenvoudige zaak zijn.

Summary

We considered the problem of optimal price setting in a situation where, at the beginning of each of a number of consecutive periods, the selling price has to be fixed and that price has an influence not only on the sales in the current period but also on the quantity demanded thereafter.

It is shown that under certain assumptions the optimal prices can be found with the aid of dynamic programming.

The procedure is illustrated with figures for demand for butter in the Netherlands.

Literatuur:

1. R. Bellman: Dynamic Programming, New York, 1957.
2. L. M. Koyck: Distributed lags and investment analysis, Amsterdam, 1954.