
Nederlandse samenvatting (Summary in Dutch)

Opties en derivaten ontstonden lang voordat de Nobelprijs winnende artikels van Black en Scholes [1973] en Merton [1973] het gebied van financial engineering tot stand brachten. Het staat vast dat optiecontracten al ten tijde van de Babyloniërs en de Grieken bestonden, hoewel de eerste georganiseerde markt voor futures pas tot stand kwam in de zeventiende eeuw in Japan, waar Japanse feodale heren hun toekomstige rijstopbrengst verkochten in een markt genaamd *cho-ai-mai*, letterlijk “rijsthandel op boek”. Rond dezelfde tijd begon men in Nederland tijdens de tulpenmanie op de Amsterdamse beurs met de handel in futures contracten en opties op tulpenbollen. De eerste officiële futures- en optiebeurs, de Chicago Board of Trade, opende in 1848, maar het was pas na de opening van de Chicago Board Options Exchange in 1973, een maand voor de publicatie van het artikel van Black en Scholes, dat de mondiale optiehandel echt op gang kwam.

Voor de ontdekking van de Black-Scholes formule hadden investeerders en speculanten heuristische methoden en hun projecties van de toekomst nodig om tot een prijs voor een derivaat te komen. Er waren al pogingen ondernomen om tot een optiewaarderingsformule te komen, beginnend met Bachelier [1900], maar alle pogingen misten het cruciale inzicht van Black, Scholes en Merton dat, onder bepaalde omstandigheden, het risico van een optie volledig afgedekt kan worden door dynamisch te investeren in de onderliggende waarde van die optie. Als men aanneemt dat er geen arbitrage mogelijkheden bestaan in financiële markten, moet de prijs van een optie derhalve gelijk zijn aan de waarde van de investeringsstrategie waarmee men deze optie repliceert. Deze ontdekking, tezamen met de komst van de zakrekenmachine en, later, de personal computer, heeft ervoor gezorgd dat de derivatenmarkt de grote industrie is geworden die het vandaag de dag is.

Door middel van replicatie konden meer exotische structuren ook worden gewaardeerd. Een van de noodzakelijke eisen waaraan een optiemodel moet voldoen, zodanig dat de prijs die eruit rolt voor een structuur zinnig is, is dat binnen dit model de prijzen van simpelere producten waarin actief gehandeld wordt, zoals bijvoorbeeld forward contracten en Europese opties, overeenkomen met hun marktprijs. Gaandeweg werd het duidelijk dat dit in het Black-Scholes model niet het geval was, en dat de aanname dat de onderliggende beschreven kan worden door een geometrische Brownse beweging met een constante, mogelijk tijdsafhankelijke drift en volatiliteit, niet adequaat was. Als deze aanname waar zou zijn, zou het oplossen van de volatiliteit van de onderliggende uit de marktprijs van een optie niet van de uitoefenprijs of looptijd van de optie af moeten hangen. Dit is niet het geval. Veel van het onderzoek binnen de financiële wiskunde heeft zich derhalve geconcentreerd op alternatieve stochastische processen voor de onderliggende waarde, zodanig dat verhandelde opties beter, zo niet perfect, teruggeprijsd worden. Om een exotische optie te waarden, moet men dan:

1. Een model kiezen dat zowel economisch plausibel als analytisch makkelijk is;
2. Het model calibreren aan de prijzen van verhandelde vanilla opties;
3. De exotische optie waarderen met het gecalibreerde model, gebruikmakend van toereikende numerieke technieken.

Dit proefschrift houdt zich voornamelijk bezig met de tweede en derde stap in dit proces. In de praktijk heeft men behoefte aan nauwkeurige prijzen en gevoeligheden, die bovendien snel berekend kunnen worden. Aangezien de financiële modellen en optiecontracten steeds complexer worden, moeten efficiënte methoden ontwikkeld worden om met zulke modellen om te gaan. Met uitzondering van één hoofdstuk gaat dit proefschrift over het efficiënt waarden van opties in zogenaamde affine modellen, gebruikmakend van methoden variërend van analytische benaderingen tot Monte Carlo methoden en numerieke integratie.

De analytisch makkelijke klasse van affine modellen, waarin het Black-Scholes model, evenals veel stochastische volatiliteit modellen waaronder Heston's [1993] model, en exponentiële Lévy modellen, wordt beschreven in Hoofdstuk 2. De mogelijkheid van een model om snel en nauwkeurig te kalibreren aan prijzen van vanilla opties draagt bij aan zijn praktische relevantie. Dit is inderdaad een van de aansprekende eigenschappen van affine modellen. Aangezien voor veel affine modellen een gesloten uitdrukking bekend is voor de karakteristieke functie, kunnen Europese opties gewaardeerd worden middels Fourier inversie.

Hoofdstuk 3 behandelt een probleem dat optreedt bij het evalueren van de karakteristieke functie van veel affine modellen, waaronder het stochastische volatiliteitsmodel van Heston [1993]. Om deze karakteristieke functie uit te rekenen dient men een complexe logaritme uit te rekenen, welke niet eenduidig gedefinieerd is. Als we de hoofdwaaarde van de logaritme nemen, zoals in veel software pakketten wordt gedaan, kan de karakteristieke functie discontinu worden, hetgeen leidt tot compleet verkeerde optieprijzen als men de optie middels Fourier inversie waardeert. In dit hoofdstuk bewijzen we dat er een formulering van de karakteristieke functie is waarin de hoofdwaaarde de enige juiste is. Soortgelijke problemen worden ook gevonden in andere modellen.

Hoofdstuk 4 houdt zich bezig met de Fourier inversie techniek die gebruikt wordt om Europese opties te waarderen binnen de klasse van affine modellen. In Hoofdstuk 2 hebben we al laten zien dat het contour van integratie in het complexe vlak leidt tot verschillende representaties van de inverse Fourier integraal. In dit hoofdstuk presenteren we het optimale contour van de Fourier integraal, waarbij we numerieke zaken zoals cancellation en moment explosie van de karakteristieke functie in ogenschouw nemen. Dit leidt tot een snel en robuust waarderingsalgoritme voor vrijwel alle uitoefenprijzen en looptijden, hetgeen in enkele numerieke voorbeelden gedemonstreerd wordt. Soortgelijke problemen in andere modellen worden eveneens bekeken.

De volgende drie hoofdstukken houden zich voornamelijk bezig met het echte waarderen van exotische opties, de laatste van de drie stappen. In Hoofdstuk 5 behandelen we het waarderen van opties met vroege uitoefenmogelijkheden, hoewel het gepresenteerde algoritme ook gebruikt kan worden voor bepaalde padafhankelijke opties. De methode is gebaseerd op een kwadratuurtechniek en hangt sterk af van Fourier transformaties. Het belangrijkste idee is om de bekende risico-neutrale waarderingsformule te schrijven als een convolutie. Deze convolutie kan efficiënt uitgerekend worden middels de Fast Fourier Transform (FFT). Deze nieuwe waarderingsmethode, die we de Convolution method noemen, afgekort CONV, kan toegepast worden op een groot aantal optie. Het enige dat men van het model moet weten is de karakteristieke functie. Zodoende is de methode van toepassing binnen veel affine modellen.

Hoofdstuk 6 focust op de simulatie van square root processen, in het bijzonder binnen het stochastische volatiliteit model van Heston. Indien men gebruik maakt van een Euler discretisatie om een square root proces met mean reversion te simuleren, stuit men op het probleem dat hoewel het proces zelf nonnegatief is, de discretisatie dit niet is. Hoewel een exact en efficiënt simulatie algoritme bestaat voor dit proces, is dit momenteel niet het geval voor het Heston model, waar de variantie gemodelleerd wordt als een square root proces. Dientengevolge moet men bij gebruik van een Euler discretisatie stilstaan bij hoe men negatieve waarden van het proces aanpast. Onze bijdrage is drievoudig. Ten eerste verenigen we alle Euler "aanpassingen" in een algemeen raamwerk. Ten tweede introduceren we het nieuwe full truncation schema, dat

als doel heeft de positieve afwijking te verkleinen die gevonden wordt bij het waarderen van Europese opties. Ten derde, en tenslotte, vergelijken we alle Euler aanpassingen met andere recente schema's. Het blijkt erg belangrijk te zijn hoe men de negatieve waarden van het proces aanpast.

Hoofdstuk 7 is anders dan de vorige hoofdstukken, daar de focus puur en alleen op het Black-Scholes model ligt. Sommige methoden uit dit hoofdstuk kunnen hoe dan ook toegepast worden op de hele klasse van affiene modellen, zoals aangetoond in Lord [2006]. Dit hoofdstuk focust op het waarderen van Europese Aziatische opties, hoewel alle bekeken methoden eenvoudig uit te breiden zijn naar het geval van een Aziatische basket optie. We behandelen een aantal verschillende methoden voor het waarderen van een Aziatische optie, en dragen aan ze allemaal bij. Ten eerste laten we de link zien tussen verschillende PDE methoden. Ten tweede, leiden we een gesloten uitdrukking af voor de ondergrens van Curran en Rogers en Shi, voor het geval van meerdere onderliggende waarden. Ten derde scherpen we Thompson's [1999a,b] bovengrenzen aan, zodanig dat deze scherper is dan alle bekende bovengrenzen. Tenslotte combineren we de traditionele moment matching approximaties met Curran's conditioneringsmethode. Men kan bewijzen dat een benadering uit de resulterende klasse van partially exact and bounded approximations (gedeeltelijk exacte en begrensde benaderingen tussen een scherpe onder- en bovengrens ligt. In numerieke voorbeelden demonstreren we dat deze benadering beter presteert dan alle op het moment van schrijven bekende grenzen en benaderingen.

Tenslotte staan we in Hoofdstuk 8 bij een compleet verschillend onderwerp stil, namelijk de eigenschappen van correlatie matrices van termijnstructuur data. Deze kunnen als invoer gebruikt worden binnen optie waarderingsmodellen voor termijnstructuren, bijvoorbeeld rente termijnstructuren. De eerste drie factoren uit een principale componenten analyse van termijnstructuur data worden in de literatuur in de regel geïnterpreteerd als zijnde level, slope en curvature (niveau, helling en kromheid) van de termijnstructuur. Gebruikmakend van milde generalisaties van theorema's uit de theorie over total positivity, presenteren we voldoende voorwaarden waaronder men inderdaad level, slope en curvature terugziet in een principale componentenanalyse. Het blijkt dat deze voorwaarden gerelateerd kunnen worden aan voorwaarden op het niveau, de helling en de kromheid van de correlatiecurve. Er wordt bewezen dat de Schoenmakers-Coffey correlatie matrix ook level, slope en curvature tentoonspreidt. Tenslotte formuleren en bekrachtigen we ons vermoeden dat de hiërarchie binnen termijnstructuren de factor slope veroorzaakt.