temps, les grandeurs économiques ou non économiques peuvent être des constantes ou des variables. Si ce sont des variables, il convient de distinguer des périodes élémentaires de temps — le mois par exemple — et de les numéroter. La valeur d'une grandeur $a$ liée à la période $t$ sera indiquée par le symbole $a_t$ : pour certaines grandeurs, il s'agira de la valeur *pendant* la période $t$, pour d'autres, à mentionner séparément, il s'agira de la valeur *à la fin* de cette période.

*Mouvements endogènes et mouvements exogènes.* — Nous appelons *mouvements endogènes* d'un système économique au cours d'une période déterminée, les mouvements constatés au cours de cette période, alors que les données restent constantes. Cela revient à dire que seules les grandeurs économiques varient. Tous les autres mouvements sont, par définition, des *mouvements exogènes*.

Un mouvement endogène est impossible lorsque les données et les grandeurs économiques sont liées par des relations d'interdépendance instantanée, c'est-à-dire lorsque les grandeurs économiques s'expriment en fonction des valeurs instantanées des données. Dans les discussions pratiques, on exprime couramment cette proposition en disant que les mouvements endogènes sont impossibles si tous les éléments du système économique s'adaptent immédiatement aux données.

*Relations statiques et dynamiques.* — Nous sommes ainsi amenés à distinguer entre relations statiques et relations dynamiques. Les relations statiques sont (suivant le vocabulaire de Ragnar Frisch) des relations entre grandeurs se rapportant à une même période élémentaire. Les relations dynamiques sont des relations entre grandeurs se rapportant à des périodes différentes. Une multitude de relations dynamiques ont déjà été relevées expérimentalement.

Dans un état stationnaire, la distinction opérée n'existe pas : les relations statiques et dynamiques se confondent. D'après ce qui précède, nous pouvons dire que les mouvements endogènes ne sont possibles que s'il y a au moins une relation dynamique entre les grandeurs du système. Dans l'intervalle de temps au cours duquel le mouvement est endogène — intervalle qui peut excéder en importance les intervalles élémentaires —, nous dirons que le

système ou le mécanisme est « non-perturbé » et qu'il effectue un « mouvement propre » ou « mouvement caractéristique ».

*Changements lents et rapides, changements passagers et permanents des données.* — En principe les grandeurs économiques comme les données peuvent décrire, en représentation graphique, une courbe quelconque. Il convient cependant de schématiser plus ou moins les variations des données afin de simplifier les calculs. On est amené à distinguer deux types de changements dans les données : les changements lents et les changements rapides. Le premier type de mouvement est tel qu'avec un degré d'exactitude à préciser ultérieurement (paragr. 18), les données peuvent être supposées constantes. Les autres mouvements des données, les mouvements rapides, peuvent être distingués provisoirement en mouvements continus et mouvements discontinus. Pour ces derniers, il convient

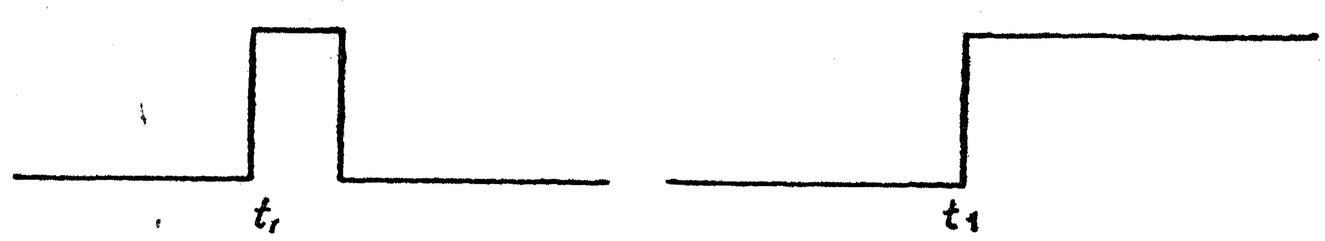


FIG. 1.

encore de distinguer entre changements *passagers* ou *temporaires* et changements *permanents*. Un changement passager est caractérisé par les formules.

$$\begin{cases} a_t = a^{(0)} & \text{pour} \quad t \neq t_1, \\ a_t = a^{(1)} & \text{pour} \quad t = t_1. \end{cases}$$

où $a_t$ symbolise une donnée quelconque. La représentation est fournie par la figure 1, diagramme de gauche. Un changement permanent est défini par les formules

$$\begin{cases} a_t = a^{(0)} & \text{pour} \quad t < t_0, \\ a_t = a^{(1)} & \text{pour} \quad t \geqslant t_0. \end{cases}$$

et se trouve représenté par le diagramme de droite.

Provisoirement nous supposerons qu'un mouvement déterminé est la superposition de plusieurs mouvements temporaires ou de plusieurs mouvements permanents. Il est clair qu'une telle hypothèse n'est valable que si l'on néglige les mouvements à l'intérieur

des périodes élémentaires. Le choix entre les deux modes de description est fondé sur leur puissance explicative respective. Nous serons cependant amenés à faire usage d'autres méthodes lorsqu'on relève des modifications *continues* du système. Une fonction quelconque du temps peut alors représenter ces modifications. Un exemple important nous est fourni lorsque cette fonction est une fonction périodique du temps (cas des « cycles forcés »).

*Importance de l'étude d'un système non perturbé.* — Dans ce qui suit, nous tenterons une description approchée de la réalité économique en faisant appel tantôt à un système animé d'un mouvement endogène, tantôt à un système animé d'un mouvement exogène.

Les systèmes en mouvement exogène seront *a priori* d'un usage plus fréquent : il est, en effet, à remarquer qu'en règle générale un système animé d'un mouvement propre se verra au cours de chaque période élémentaire perturbé par des variations dans les données. L'étude des systèmes non-perturbés n'en est pas moins importante. Il y a à cela une raison déterminante : le traitement des problèmes mondiaux des cycles économiques amène à penser que la plupart des changements rapides des données sont fortuits. S'il en est ainsi, la probabilité d'enregistrer une perturbation dans une direction est égale à celle d'enregistrer une perturbation dans la direction opposée, de telle sorte qu'en cas de prévision, le mouvement non-perturbé se présente comme le mouvement le plus probable. C'est encore le mouvement non-perturbé qu'il convient de considérer lorsque se posent les problèmes pratiques de la stabilisation des oscillations cycliques : seules sont alors à considérer les tendances systématiques du système.

L'explication des mouvements tels qu'ils sont révélés par l'observation exige l'intervention des perturbations fortuites, alors que l'étude du mouvement économique d'un seul pays nécessite l'appel à la notion de perturbations systématiques.

Nous commencerons par l'étude du mécanisme non-perturbé, c'est-à-dire d'un système de relations où les perturbations aléatoires sont éliminées.

*Approximation macrodynamique.* — Nous avons déjà remarqué que les relations entre grandeurs économiques et données sont dynamiques, sans quoi les mouvements endogènes ne sont pas

possibles. Ajoutons à cela que le nombre des variables est tellement grand que l'on se trouve dans l'obligation de rechercher une approximation de la réalité. L'approximation qui se présente logiquement est l'approximation macrodynamique suivant laquelle les quantités produites ou échangées, les prix, etc... ne sont pas considérés séparément pour chaque bien, mais sont synthétisés en nombres-indices : nombre-indice de la production, nombre-indice des quantités échangées, nombre-indice des prix, etc....

## 2. Exemple central et notations.

A de nombreuses reprises nous ferons appel systématiquement à un même exemple, afin d'éclairer les notions et fixer nos positions. Cette manière de faire ne nous empêchera d'ailleurs pas de nous reporter à d'autres exemples. L'exemple central choisi fournit une représentation approchée de la réalité de l'économie des États-Unis entre 1919 et 1932.

Il va sans dire que de nombreuses études préparatives ont été poursuivies avant que l'auteur soit parvenu au système d'équations qui va être établi. Il nous paraît au demeurant inutile de traiter les problèmes partiels dans l'ordre où ils s'étaient présentés. Ceux d'entre eux qui nous ont paru avoir en eux-mêmes de l'importance seront traités dans le cours de ce fascicule. (Les chiffres présentés doivent être considérés comme provisoires, ils n'interviennent dans nos développements qu'à titre d'exemple).

Nous retiendrons, en ce qui concerne les notations à employer, les recommandations formulées par un groupe d'économistes hollandais d'après lesquelles :

— *les majuscules* sont réservées aux quantités exprimées en unité monétaire,

— *les minuscules* à la désignation des prix et variables physiques,

— *les caractères grecs* à celle des élasticités et autres grandeurs analogues,

— *les indices* inférieurs placés à droite correspondent aux périodes élémentaires du temps,

— *les caractères* surmontés d'une barre sont les valeurs d'équilibre et enfin,

— le symbole $\bar{a}_t$ représente $\sum_{0}^{t}{}_i\, a_i$.

— le symbole [4] indiquera la période de décalage de l'équation (4).

Comme nous l'avons déjà fait observer, la réalité a été considérablement simplifiée afin de pouvoir traiter complètement un exemple. Ainsi supposerons-nous négligeable l'excédent des importations sur les exportations (1), les mouvements du taux de l'intérêt à long terme, les variations cycliques de la productivité du travail et de la capacité productrices des entreprises, etc....

Nous avons supposé d'ailleurs que seuls le niveau *moyen* des prix, le niveau *moyen* des salaires et le niveau *moyen* du taux de l'intérêt déterminent, en premier lieu, (et de la manière indiquée par nos équations) les ventes, les profits, les investissements, etc.... Cette hypothèse nous amène à négliger ou à exclure divers changements relatifs. Ils n'ont été retenus que dans la mesure où ils intéressent la totalité des entreprises, l'ensemble des ouvriers, etc.

Les *sujets* qui jouent un rôle dans notre exemple central se divisent en *sujets physiques :* 1° ouvriers, 2° non-ouvriers ; et en *sujets institutionnels ;* 1° institutions qui peuvent créer de nouveaux crédits ou peuvent détruire des moyens de paiement ; 2° toutes autres institutions (entreprises en général).

Quant aux *biens*, on distinguera 1° les biens de consommation, y compris toutes les matières premières, les produits semi-finis, ainsi que les machines, etc., servant à l'amortissement régulier et 2° les biens destinés aux nouveaux investissements.

Nous donnons ci-après une énumération des variables macro-économiques qui vont être considérées :

1. *Variables physiques.*

$u_t$ quantité des biens de consommation dont le processus de la production a été commencée dans la période $t$ ;

$u'_t$ quantité des biens de consommation vendus ;

(1) Il peut être utile d'observer que le fait qu'une certaine grandeur économique n'apparaît pas dans les équations ne signifie pas que cette grandeur est nulle. Nous avons, par exemple, négligé l'*excédent* des importations sur les exportations ; cette hypothèse n'entraîne aucune détermination pour les importations ou pour les exportations : cela signifie seulement que ces variables sont égales, de telle sorte qu'elles peuvent être omises dans l'équation (5).

$a_t$ nombre total des heures de travail réalisées dans la période $t$ ;

$b_t$ heures de travail relatives à la production des investissements nouveaux ;

$c_t$ heures de travail dans toute autre production ;

2. *Prix, etc....*

$p_t$ prix des biens de consommation (c'est-à-dire coût de la vie) ;

$l_t$ taux des salaires ;

$m_t$ taux de l'intérêt ;

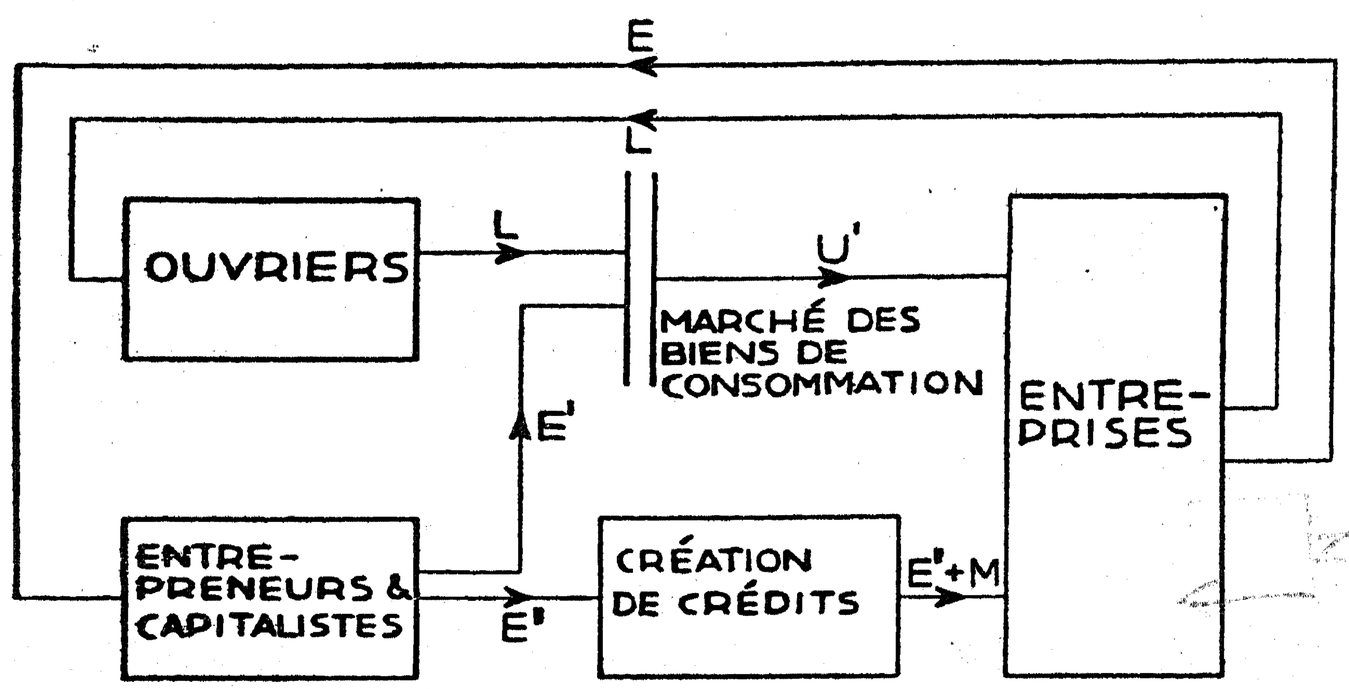


FIG. 2.

3. *Montants exprimés en unité monétaire.*

$U'_t$ valeur totale des biens de consommation vendus ;

$L_t$ somme totale des salaires ;

$Z_t$ somme totale de tous les autres revenus, y compris les revenus non distribués des entreprises ;

$E_t$ somme de ces revenus, non compris les revenus non distribués par les entreprises ;

$E'_t$ partie de $E_t$, affectée à la dépense de biens de consommation (1) ;

$E''_t$ partie épargnée ou thésaurisée de $E_t$ ;

$M_t$ crédits (positifs ou négatifs) créés par les entreprises bancaires

(1) Le moment de la dépense semble être retardé ; c'est là notre hypothèse qui paraît être confirmée par les statistiques des ventes. $E'_t$ sera donc égal aux dépenses de la période suivante.

et mis à la disposition des entreprises et des spéculateurs ($M < 0$ signifie qu'une partie de $E''_t$ est thésaurisée).

La figure 2 donne un schéma de la circulation monétaire.

*Choix des unités.* — L'unité monétaire a été choisie en sorte que l'on ait $\overline{Z} = 1$, il s'en suit avec une approximation suffisante, que $\overline{L} = 1$. (Pour les chiffres utilisés, voir paragr. 15). L'unité de travail est telle qu'on arrive à $\bar{a} = 1$ ; il s'en suit que $\bar{l} = \frac{\overline{L}}{\bar{a}} = 1$. L'unité des biens de consommation a été arrêtée de manière à avoir $\bar{p} = 2$. De ces chiffres on déduit que $\bar{b} = 0{,}2$ et $\bar{u} = 0{,}9$.

### 3. Simplifications mathématiques.

Dans notre exemple central, nous avons adopté certaines hypothèses mathématiques destinées à rendre maniable le système d'équations auquel nous allons parvenir. Comme il nous semble que l'application de plusieurs de ces simplifications mathématiques peut être utile dans beaucoup d'autres essais, nous les énonçons rapidement comme suit :

1. *Les valeurs d'équilibre des variables sont constantes.* — Les valeurs numériques de ces constantes ne nous intéressent que dans la mesure où elles figurent dans nos équations. Certaines d'entre elles disparaissent cependant en raison de leur caractère même de valeurs d'équilibre. Elles satisfont, en effet, des équations dans lesquelles les déviations à partir de la position d'équilibre sont supposées nulles. Un exemple nous est fourni par l'équation du budget des sujets non ouvriers (l'équation (2) du paragraphe suivant)

$$\overline{E} + E_t = \left(\overline{E}' + E'_t\right) + \left(\overline{E}'' + E''_t\right),$$

dont la signification est claire. Dans un état d'équilibre statique, nous aurons par définition

$$E_t = E'_t = E''_t = 0$$

Il suit

$$\overline{E} = \overline{E}' + \overline{E}''$$

cette dernière équation donne une relation entre les valeurs d'équilibre.

2. *Les valeurs des déviations à partir de la position d'équilibre ont été supposées petites* eu égard aux valeurs d'équilibre des variables qui ont été choisies comme unités de base. Dans cette hypothèse, nous pouvons négliger les carrés et les produits mutuels de ces déviations, c'est-à-dire que l'on parvient à des équations linéaires (1) (voir cependant paragraphe 9).

3. Le calcul des dérivés par rapport au temps est réalisé par approximation en usant des différences finies moyennes calculées pour un intervalle utile. Cet intervalle sera un intervalle petit d'une longueur telle que les calculs sont simplifiés autant que possible.

4. Pour autant que cela sera nécessaire, quand une variable et son intégrale par rapport au temps se trouvent dans le système d'équations, on a adopté comme nouvelle variable cette intégrale, en exprimant la variable primitive comme spécifié sous 3.

## 4. Les équations élémentaires.

Dans ce paragraphe nous considérons les relations que nous supposons exister entre les différentes variables d'un système non perturbé. Certaines de ces relations dérivent des définitions elles-mêmes, tandis que les autres résultent des actions des sujets économiques. Nous discuterons plus tard (paragraphe 14) la signification de nos équations au regard de la théorie statique de l'économie. Nous rappelons seulement qu'elles établissent, dans la mesure du possible, une image simplifiée mais réaliste, et contrôlée par des recherches statistiques provisoires, de la dynamique économique. Voici la liste de nos équations (2).

L'équation de la *somme totale des salaires* procède simplement de sa définition

$$\bar{L} + L_t = (\bar{l} + l_t)(\bar{a} + a_t).$$

(1) D'ailleurs la plupart des relations dont nous ferons usage semblent être linéaires alors même que les déviations sont assez grandes. Voir les fig. 3 et 8-16.

(2) Une discussion plus ample des principales d'entre elles a été donnée dans notre article intitulé « Einige Grundfragen der mathematischen Konjunkturtheorie », *Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung*, III (1937), p. 1.

Suivant le choix des unités fait plus haut et en utilisant nos simplifications mathématiques, nous pouvons écrire cette égalité

$$L_t = l_t + a_t. \tag{1}$$

L'équation du *budget des sujets non ouvriers* exprime, d'une manière connue, la destination à laquelle est affecté le revenu de ces sujets

$$E_t = E'_t + E''_t. \tag{2}$$

L'équation des *ventes des biens de consommation* exprime que la valeur des ventes est égale au produit de la quantité et des prix

$$\overline{U}' + U'_t = \left(\overline{p} + p_t\right)\left(\overline{u}' + u'_t\right),$$

qui se réduit à

$$U'_t = 0.9\, p_t + 2u'_t. \tag{3}$$

L'équation *des profits* reflète, d'une manière simple, le procédé de calcul des profits, les autres revenus non ouvriers compris. Nous supposons qu'elle a la forme suivante que nous expliquerons tout de suite :

$$\overline{Z} + Z_t = \left(\overline{u} + u_t\right)\left(\overline{p} + p_t\right) + f(b_{t-[4]}) - \left(\overline{l} + l_t\right)\left(\overline{c} + c_t\right) - \left(\overline{l} + l_t\right)\left(\overline{b} + b_{t-[4]}\right) + \zeta\, \dot{Z}_t.$$

Les quatre premiers termes se rapportent aux entreprises. Le premier terme représente la valeur des produits vendus aux consommateurs, le deuxième terme la valeur des biens d'investissement (seuls les investissements nouveaux). Ce terme a été introduit sous une forme assez générale en vue d'éviter d'entrer dans le détail. D'une manière générale, on peut supposer que les prix des biens d'investissements nouveaux varient dans le même sens que les quantités et que celles-ci varient dans le même sens que le nombre d'heures de travail, mais avec une certaine période de décalage : les ventes ne pouvant s'effectuer qu'à la fin de la production.

Les troisièmes et quatrièmes termes représentent le coût de production, qui, dans ce cas particulier, ne comporte que les salaires, puisque les amortissements sont supposés constants.

Le cinquième terme se rapporte non seulement aux entreprises, mais aussi aux personnes qui vivent par exemple de la spéculation. Ce terme varie proportionnellement à la vitesse de variation de Z

lui-même, dans le cas où la valeur des actions, par exemple, varie dans la même direction et proportionnellement aux susdits changements. Comme nous l'avons déjà dit, nous supposerons que toutes les fonctions introduites ont comme valeur approchée des fonctions linéaires. Cela nous conduit à la simplification suivante de l'équation en Z

$$(4) \qquad Z_t = 0{,}9p_t + 2u'_t + \zeta_B\, b_{t-[4]} - l_t - c_t - b_{t-[4]} + \zeta \dot{Z}_t.$$

Pour la suite, nous remplacerons le dernier terme par une différence finie, choisie convenablement du point de vue de l'unité de temps à utiliser.

L'équation du *débit des biens de consommation* est

$$(5) \qquad U'_t = L'_t + E'_{t-[5]}.$$

L'équation du *budget du travail* est

$$(6) \qquad a_t = c_t + b_t.$$

L'équation de la *productivité du travail* est

$$(7) \qquad c_t = 0{,}9u_{t-[7]}.$$

Dans cette relation on admet que le nombre d'heures de travail dans la production varie proportionnellement à la quantité en production (1) ; cette quantité marque elle-même un certain décalage par rapport à la grandeur $u_t$, c'est-à-dire la quantité commencée.

L'équation de la *production*

$$(8) \qquad u_t = u'_t$$

note que la quantité de la production commencée se règle sur celle des ventes.

L'équation des *prix*

$$(9) \qquad p_t = \pi\, u_{t-[9]}.$$

signifie que les prix sont fixés d'après le volume des ventes, mais avec une certaine période de décalage.

(1) Les chiffres américains de la production et des heures de travail confirment cette hypothèse ; c'est cependant en partie une conséquence du fait que dans la baisse, quand la productivité dans chaque branche est plus faible que dans la hausse, l'importance relative des industries de biens de capitaux (au sens technique) augmente.

L'équation des *salaires*

$$l_t = \lambda_a \, \tilde{a}_{t-[10]} + \lambda p_{t-[10]} \tag{10}$$

signifie que le taux des salaires varie principalement du fait l'emploi et des variations du coût de la vie, ainsi qu'il résulte recherches du Bureau Central de Statistique des Pays-Bas

L'équation des *investissements*

$$b_t = \alpha \, Z_{t-[11]} - \beta \, m_{t-[11]} \tag{11}$$

est l'expression du fait que la quantité de travail consacré à l'ext sion des instruments de production est déterminée principalem par le taux des profits et le taux de l'intérêt. En effet, les mou ments du taux des profits, c'est-à-dire des profits par unité capital investi, sont à peu près parallèles à ceux des profits tot $\bar{Z} + Z_t$ : les mouvements du capital investi sont très modérés

L'équation de la *distribution des profits*

$$E_t = \varepsilon \, Z_t, \tag{12}$$

dans laquelle on suppose que les profits distribués se meu parallèlement aux profits calculés (ce qui n'est d'ailleurs pa même chose qu'un mouvement proportionnel ; dans ce dernier on aurait $\varepsilon = \frac{\bar{Z}}{\bar{E}}$, ce qui n'est pas supposé ici).

L'équation de l'*épargne* est

$$E''_t = \varepsilon' \, E_t + \alpha' \, Z_t - \beta' \, m_t - \varepsilon_Z \, \dot{Z}_t. \tag{13}$$

Cette équation est considérée sous cette forme assez génér car on ne possède que très peu de renseignements positifs su point. On trouvera au paragraphe 16 le détail de quelques cal faits à ce sujet.

L'équation du *taux de l'intérêt*

$$m_t = \mu_M \, \tilde{M}_{t-[14]} - \mu_P \, p_{t-[14]}. \tag{14}$$

explicite les principaux facteurs endogènes qui déterminent

(1) Voir *De Nederlandsche Conjunctuur*, 1933, juin et septembre, p. 10.

(2) Je dois à M. BREIT la remarque suivant laquelle le taux des profits (et les profits par unité produite) est prépondérant ; les statistiques confirment manière de voir. M. KALECKI conteste l'opinion d'après laquelle les mouve du capital peuvent être négligés.

décisions des banques centrales en ce qui concerne le taux de l'escompte. Ces facteurs sont :

*a*) le montant $\tilde{M}$ des crédits totaux créés jusqu'au moment considéré,

*b*) le niveau des prix (1), dans la mesure où la stabilisation des prix est réalisée à l'aide d'une politique de l'escompte.

On a supposé du reste qu'un délai de [14] unités (notation symbolique comme on s'en souvient) est inévitable.

L'équation du *volume des crédits créés*

$$M_t = L_t + E_t - U'_t - E''_t \tag{15}$$

résulte de l'équation du budget des entreprises. Cette équation traduit entre autres le fait constaté ces dernières années, à savoir qu'une forte contraction de la production, se traduisant par

$$L_t \ll U'_t$$

crée un besoin négatif de nouveaux prêts.

## 5. Valeurs numériques des coefficients.

Des recherches statistiques nous ont montré que ces équations constituent une approximation assez bonne de la réalité pour la période et le pays considérés. Les détails de ces recherches sont discutés plus bas (paragraphe 15 et 16). La figure 3 donne une idée générale de l'accord entre la réalité et nos hypothèses. On a adopté les valeurs suivantes pour les coefficients et les périodes de décalage.

$\zeta_B = 3{,}5$, [4] = quelques mois ;

$\zeta = 0{,}4$, quand on remplace $\dot{Z}_t$ par la différence entre Z pour l'année considérée et Z pour l'année précédente ; [5] = 6 mois environ ;

[7] presque négligeable ;

$\pi = 1.3$, [9] = 9 mois environ ;

$\lambda_a = 0$, $\lambda_p = 0{,}63$, [10] négligeable ;

$\alpha = 0{,}12$, $\beta = 0$, [11] = 4 mois ;

(1) Sur un facteur exogène de grande importance, à savoir le stock d'or, voir paragr. 16.

$\varepsilon = 0{,}67$ ; $\varepsilon' = 0{,}42$, $\alpha' = \beta' = 0$, $\varepsilon'_z = 0{,}15$, quand on remplace $\dot{Z}_t$ par la différence mentionnée plus haut ;

$\mu_M = 3{,}34$, $\mu_P = 0$, $[14] = 6$ mois environ.

Dans plusieurs cas, il subsiste une certaine incertitude sur la

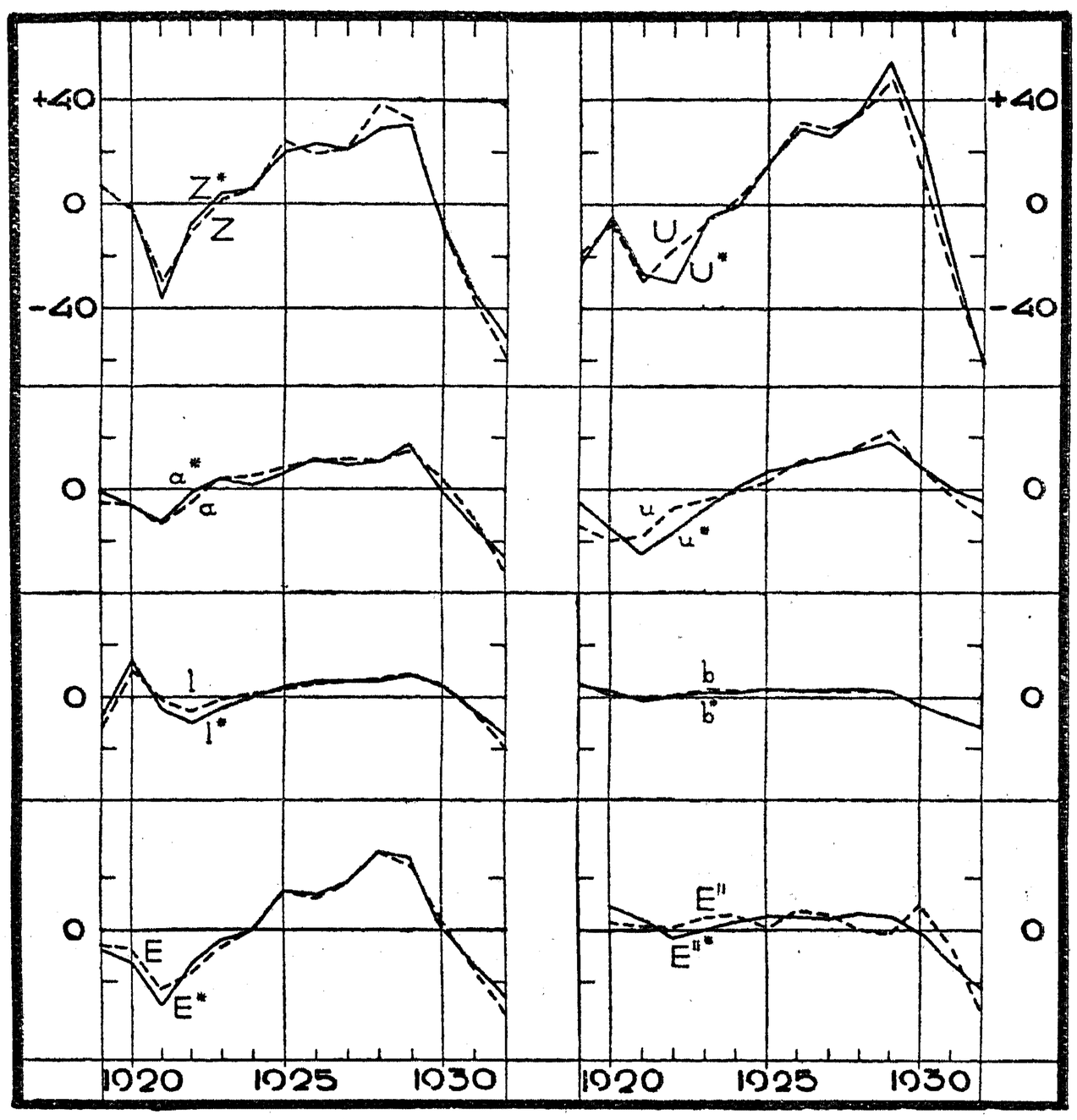


FIG. 3. — Diagramme montrant la corrélation entre les variables observées (– – – –) et les valeurs calculées (———) à l'aide des formules.

longueur des périodes de décalage. Seules des recherches ultérieures, fondées sur des données plus exactes, permettront d'obtenir un degré de certitude plus grand en ce qui concerne ces valeurs. Il ne faut pas perdre de vue, par conséquent, que ces chiffres sont fournis à titre d'exemple, mais en l'espèce l'exemple est beaucoup plus réaliste que la plupart de ceux qui sont donnés dans la littérature économique. Dans les calculs que nous ferons à l'aide de ces chiffres, nous avons fait un choix plus ou moins arbitraire de ces

périodes de décalage. Nous avons procédé de la même façon en ce qui concerne la « distance » des termes pour la différence finie par laquelle Z a été remplacée. Le choix a été tel que les *mouvements des variables qui en résultent ne présentent un amortissement excessif ou une « explosion » trop marquée.* (Par « explosion » nous entendons l'amortissement négatif.) Cette exigence, qui semble être en concordance avec la réalité, restreint d'une manière remarquable le nombre de possibilités, de sorte que nous avons la conviction que l'exemple choisi ne s'écarte pas beaucoup de ce qui se produit effectivement.

On pourrait craindre que la méthode suivie restreigne considérablement la portée de nos résultats. Il y a cependant lieu de penser que nos conclusions sur la politique conjoncturelle demeurent valables pour une grande variété de système « concurrents ».

On s'est arrêté aux chiffres suivants en vue des calculs développés plus loin : [4] = 4 mois ; [5] = 8 mois ; [7] = 0 ; [9] = 8 mois ; [10] = 0 ; [11] = 4 mois et [14] = 4 mois. Il en résulte le système suivant d'équations, où l'unité du temps est égale à 4 mois :

$$(1') \quad L_t = l_t + a_t$$

$$(2') \quad E_t = E'_t + E''_t$$

$$(3') \quad U'_t = 0.9\, p_t + 2u'_t$$

$$(4') \quad Z_t = 0.9p_t + 2u'_t + (\zeta_B - 1)\, b_{t-1} - l_t - c_t + 3\zeta\,(Z_{t-1} - Z_{t-2})$$

$$(5') \quad U'_t = L_t + E'_{t-2}$$

$$(6') \quad a_t = c_t + b_t$$

$$(7') \quad c_t = 0{,}9u_t$$

$$(8') \quad u_t = u'_t$$

$$(9') \quad p_t = \pi\, u_{t-2}$$

$$(10') \quad l_t = \lambda\, p_t$$

$$(11') \quad b_t = \alpha\, Z_{t-1}$$

$$(12') \quad E_t = \varepsilon\, Z_t$$

$$(13') \quad E''_t = \varepsilon'\, E_t - 3\varepsilon'_Z\,(Z_{t+1} - Z_t) \quad (1)$$

(1) On pourrait s'étonner que d'après cette équation, la grandeur $E''_t$ dépende d'une grandeur $Z_{t+1}$ qui n'est pas encore réalisée au moment $t$. Cependant il n'en est rien, puisque la grandeur $E''_t$ ne devient « active » qu'après deux unités de temps : nous avons supposé une période de décalage équivalente à cette longueur entre le moment où les revenus se forment et le moment où les dépenses sont faites

$$(14') \quad m_t = \mu_M \widetilde{M}_{t-1}$$
$$(15') \quad M_t = L_t + E_t - U'_t - E''_t$$

Le résultat des recherches statistiques éveille déjà notre intérêt, avant que nous procédions à tout calcul, par le fait que $\beta = \beta' = 0$. Cela signifie que le taux de l'intérêt n'a pas une influence importante sur les investissements et sur l'épargne. Nous reviendrons sur ce fait remarquable dans ce qui suit. Une des conséquences en est évidemment que l'origine de la baisse doit être attribuée à d'autres facteurs qu'au niveau élevé du taux de l'intérêt. C'est l'interdépendance entre les profits spéculatifs, les profits totaux et l'investissement surtout qui joue un rôle décisif.

## 6. L'ÉQUATION FINALE ET L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE ; VARIABLES SYMPTOMATIQUES.

Afin de trouver les solutions du système d'équations élémentaires déterminant les mouvements du système économique, nous allons essayer d'éliminer toutes les variables sauf une. Dans le cas où les équations sont linéaires et ne contiennent pas d'intégrales ou de dérivées, cette élimination est toujours possible, comme cela résulte des simplifications discutées au paragraphe 3 ; dans notre exemple central, elle est même réalisable à l'aide de calculs très simples. Nous allons ainsi aboutir à une seule équation, contenant une seule variable. Nous appellerons cette équation l'*équation finale*. Quand les équations ne sont pas de ce type simple, il n'est pas toujours possible d'effectuer cette réduction. On parvient alors à un système d'équations que nous appellerons *système irréductible*. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que les cas aboutissant à une seule équation finale. Les difficultés évitées de cette manière ne sont pas, comme il me semble, d'importance pratique majeure.

Le procédé d'élimination est extrêmement simple pour les variables qui n'apparaissent que dans une seule équation élémentaire : il suffit d'omettre cette équation. Il est clair que la variable

---

(voir l'équation 5') ou la décision d'épargner est prise. La signification de l'équation (13') est la suivante : la partie du revenu non-ouvrier due à la spéculation, est dépensée après un délai plus court que le reste de ce revenu. Afin de rattacher la présente étude à notre article dans la *Weltwirtsch. Archiv*, 42 (1935), p. 366, nous en avons utilisé ici les mêmes notations.

en question et les coefficients de l'équation en question n'ont aucune influence sur les mouvements des autres variables. D'autre part, les mouvements de la variable en question sont bien influencés par les autres variables à cause de l'équation mentionnée. Une telle variable ne joue qu'un rôle passif dans la dynamique économique du système considéré ; appelons-la *variable symptomatique.* Le caractère de l'équation qui la détermine — qu'elle soit linéaire ou non — n'a aucune importance pour le processus d'élimination ni pour les mouvements du système.

*Dans notre exemple central, c'est le taux de l'intérêt qui joue ce rôle* en raison de la valeur des coefficients $\beta$ et $\beta'$ qui sont nuls. La seule équation dans laquelle le taux de l'intérêt apparaît est l'équation (14′) qui la détermine. On pourrait penser que cette remarque est en contradiction avec la théorie monétaire des conjonctures. S'il en était ainsi, tant pis pour cette théorie. Il n'en est pas ainsi cependant. La faible influence du taux de l'intérêt sur les investissements résulte tout au contraire de la grande élasticité du système contemporain du crédit, fait qui a été tout spécialement souligné par la théorie monétaire.

Il suit que l'équation (14′) disparaît de notre système d'équations. Cela fait, la chose se répète avec la variable $M_t$, qui ne demeure que dans l'équation (15). *Les crédits créés sont eux aussi une variable symptomatique.*

On aurait pu formuler ces remarques d'une autre manière, en disant que le système des deux équations (14′) et (15′) détermine les deux variables $m_t$ et $M_t$ comme fonctions des autres variables (et des perturbations, le cas échéant) et qu'il y a alors un *système* de variables symptomatiques [1].

Un autre fait remarquable se présente quand nous choisissons dans l'équation (7) une période de décalage égale à zéro, comme nous l'avons fait dans (7′). Dans ce cas, après élimination de toutes les variables sauf Z, $l$, $p$ et $u$, on aboutit à deux équations

$$(6.1) \qquad 0{,}9p_t + 1{,}1u_t - l_t = Z_t - 3\zeta Z_{t-1} + (3\zeta - \zeta_b\alpha)Z_{t-2}$$

(en écrivant $\zeta_b$ pour $\zeta_B - 1$) et

(1) Un autre cas d'une variable symptomatique dans notre exemple central est constitué par les stocks dont les mouvements sont déterminés par $u$, $u'$ et [8].

$$(6.2) \qquad 0{,}9p_t + 1{,}1u_t - l_t = (\alpha + 3\varepsilon'_Z)\, Z_{t-1} + \left[\varepsilon(1-\varepsilon') - 3\varepsilon'_Z\right] Z_{t-2}$$

On peut facilement éliminer de ces équations $u$, $p$ et $l$, parce qu'ils ne se trouvent que dans l'expression $0{,}9p + 1{,}1u - l$, apparaissant à la fois dans les deux relations. Il s'en suit que les mouvements de Z ne sont pas influencés par les coefficients $\lambda$ et $\pi$, qui ne paraissent que dans le membre gauche de la relation.

D'autre part, les mouvements de $u$ et par suite ceux de $u'$, $p$ et $l$, de $c$, $a$, L et U′ ne dépendent pas seulement des mouvements de Z, mais présentent à côté de ces mouvements des composantes indépendantes, régies par l'équation

$$0{,}9p_t + 1{,}1u_t - l_t = 0 \quad \text{ou} \quad \pi(0{,}9 - \lambda)u_{t-2} + 1{,}1u_t = 0.$$

En effet, tout mouvement obéissant à cette relation est compatible avec notre système (6.1) et (6.2). Les mouvements de toutes les variables s'affirment par des composantes communes et, en outre, les mouvements d'une partie des variables présentent d'autres composantes qui n'apparaissent pas dans les mouvements de Z, $b$, E, E′ et E″.

Si, au contraire, nous supposons que la période de décalage (7) n'est plus égale à zéro les variables $p$, $u$ et $l$ ne présenteront pas de composantes qui ne se retrouvent pas dans le mouvement déterminé par les autres variables. La complication à laquelle nous avons fait allusion apparaît encore plus nettement dès que le système donné d'équations se compose de deux parties, dont chacune contient des variables qui ne se retrouvent pas dans l'autre. Les deux groupes de variables évoluent alors indépendamment l'un de l'autre. Nous pourrions parler d'un *système dégénéré.*

Pour simplifier, car *les résultats ne sont pas très différents du cas plus général* (1), nous nous limiterons à la solution des équations (6.1) et (6.2). Après élimination des variables du membre de gauche, on obtient l'équation fonctionnelle suivante pour $Z_t$,

$$(6.3) \quad Z_t - (3\zeta + \alpha + 3\varepsilon'_Z)Z_{t-1} + (3\zeta + 3\varepsilon'_Z - \alpha\zeta_b - \varepsilon)Z_{t-2} = 0.$$

en écrivant $\bar{\varepsilon}$ pour $\varepsilon(1 - \varepsilon')$.

C'est l'*équation finale* d'un système plus ou moins dégénéré.

(1) où [7] $\neq 0$ ; cet exemple a été calculé par le Dr DERKSEN à qui j'exprime ma reconnaissance pour son assistance précieuse.

Elle détermine les mouvements de Z lorsque la valeur de cette variable est donnée dans deux périodes élémentaires successives. Elle commande également les mouvements des variables ne dépendant que de Z, c'est-à-dire $b$, E, E′ et E″. L'équation finale peut être utilisée de deux manières. La première est celle qui permet de déduire le caractère général des mouvements. On y arrive en recherchant la solution générale de l'équation, procédé simple dans notre cas.

En posant, par tâtonnement, $Z = Cx^t$, nous trouvons l'équation suivante pour $x$

$$(6.4) \quad x^2 - (3\zeta + \alpha + 3\,\varepsilon'_Z)\,x + (3\zeta + 3\,\varepsilon'_Z - \alpha\,\zeta_b - \bar{\varepsilon}) = 0,$$

que nous appellerons *équation caractéristique* de notre système. En substituant les valeurs numériques pour les coefficients élémentaires, nous trouvons

$$(6.5) \qquad x^2 - 1{,}8x + 1.0 = 0.$$

d'où

$$(6.6) \qquad x = 0{,}9 \pm \sqrt{0.8 - 1.0} = 0.9 \pm 0.45i,$$

de sorte que pour ces deux valeurs de $x$, la solution posée est en effet une solution de l'équation finale, dans laquelle la valeur de C est arbitraire. Par suite du caractère linéaire de l'équation finale toute combinaison linéaire des deux solutions est elle-même une solution, d'où la forme générale :

$$(6.7) \qquad C_1x_1^t + C_2x_2^t.$$

Si nous ne retenons que les valeurs de Z correspondant aux valeurs entières de $t$, cette solution est la solution générale : elle contient deux constantes. De toutes les solutions comprises dans (6.7) seules les solutions pour lesquelles $C_1$ et $C_2$ sont des nombres complexes conjugués auront une signification économique. Les autres valeurs de $C_1$ et $C_2$ donneront des valeurs complexes de Z, ce qui n'a pas de sens. Une transformation mathématique simple permet d'écrire la solution générale sous la forme

$$(6.8) \qquad Z_t = Ce^{\rho t} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \theta\right),$$

c'est l'expression du mouvement cyclique, amorti ou amplifié

suivant le cas, de Z. Dans cette relation les grandeurs C et $\theta$, l'amplitude et la phase sont arbitraires, tandis que $\rho$ et T ont une valeur déterminée par (6.6), à savoir :

$$\rho = 1.0 \quad \text{et} \quad T = 13 \text{ à } 14 \quad (^1).$$

Cela signifie que le mouvement cyclique n'est pas amorti et que sa période (13 à 14) $\times$ 4 mois = 4 1/2 années. Comme nous l'avons déjà affirmé, ce nombre n'est pas spécialement lié à ces valeurs numériques : $\rho$ et T s'avèrent assez sensibles par rapport aux décalages choisis alors que les résultats prévus pour la politique à suivre (voir paragraphe 31) sont plus définis.

La deuxième utilisation de l'équation finale consiste dans le calcul numérique du mouvement de Z, étant donné les valeurs dans deux périodes élémentaires consécutives. C'est ce qu'on pourrait appeler l'*extrapolation numérique* de Z. C'est là le *pronostic du mouvement non perturbé* que nous pouvons effectuer. Il va sans dire que ce pronostic ne donne pas toujours des résultats identiques à la réalité, puisqu'en réalité des perturbations s'y joignent. Toutefois, les résultats sont assez remarquables. Nous en reparlerons en discutant du système perturbé.

Nous poursuivrons ici la recherche des mouvements non perturbés.

Les équations (11′), (12′), (13′) et (2′) nous donnent les mouvements de $b$, E, E″ et E′ respectivement, quand ceux de Z sont connus. Ils peuvent présenter une amplitude et une phase différentes de celles de Z, mais leurs amplitudes et leurs phases sont déterminées par les grandeurs analogues de Z.

Afin de connaître les mouvements des autres variables, nous ferons usage de l'équation (6.2) combinée avec (9′) et (10′), dont nous déduisons

$$\pi\left(0{,}9 - \lambda\right) u_{t-2} + 1{,}1 u_t = \left(\alpha + 3\varepsilon'_Z\right) Z_{t-1} + \left(\bar{\varepsilon} - 3\varepsilon'_Z\right) Z_{t-2}. \tag{6.9}$$

On voit que les mouvements de $u$ ne seront déterminés que quand une seule valeur de $u$ est donnée d'avance. Avec cette valeur comme point de départ, on peut utiliser (6.9) pour l'extrapolation

(1) Cette valeur représente la valeur maximum de T ; on en obtient une infinité d'autres quand on considère comme argument de $x$ des valeurs de $2\pi$ ou d'un multiple de $2\pi$ plus grandes.

numérique de $u$ ; et à l'aide des autres équations du système d'équations élémentaires, également l'extrapolation numérique des autres variables. En ce qui concerne la solution générale de l'équation (6.9), nous avons affaire à une équation aux différences non homogènes ; les solutions sont des sommes d'une solution particulière de (6.9) et de la solution générale de l'équation homogène

$$(6.10) \quad \pi\,(0{,}9 - \lambda)u_{t-2} + 1{,}1u_t = 0.$$

Cette dernière équation s'écrit, pour les valeurs numériques de notre exemple central

$$(6.11) \quad u_t = -\,0.32u_{t-2}.$$

Elle représente, comme on le voit sans une solution formelle, un mouvement cyclique à période de 4 unités de temps (16 mois) et avec un amortissement considérable. L'amplitude initiale est arbitraire et représente la seule constante qui y entre.

Il n'est pas difficile de voir qu'une solution particulière de (6.9) est obtenue par

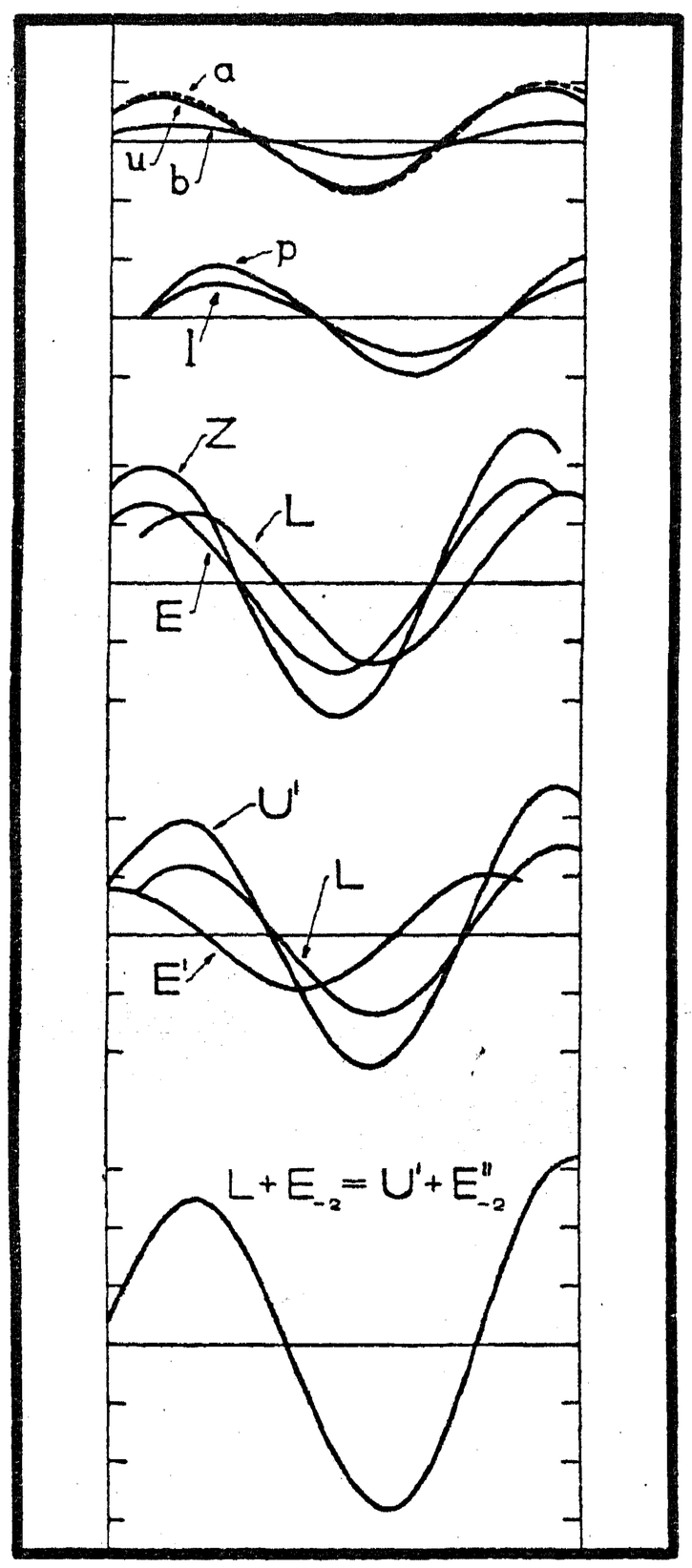


FIG. 4. — « Baromètre » des mouvements caractéristiques du système considéré, montrant les amplitudes et les décalages des séries indiquées. Unités absolues.

$$(6.12) \quad u_t = \mathrm{C}Z_{t-[u]}$$

c'est-à-dire à partir de l'hypothèse d'après laquelle $u_t$ a la même période et le même degré d'amortissement que Z, mais une amplitude qui est C fois celle de Z et un décalage de durée $[u]$ en rapport avec Z. La substitution de (6.12) en (6.9) nous fournit les valeurs

uniques de C en $[u]$. La solution générale de $u_t$ sera, comme nous avons déjà dit, la somme de (6.12) et de la solution générale de (6.11) c'est-à-dire que les mouvements de $u$ montrent deux composantes :

*a*) une composante avec la période et le degré d'amortissement de Z, mais avec une certaine différence d'amplitude et de phase avec lui ;

*b*) une composante à amplitude arbitraire (c'est-à-dire ne dépendant pas des mouvements de Z), avec une période de 16 mois et un amortissement correspondant à 0.32 par 8 mois.

On trouve des résultats analogues pour les autres grandeurs. Tout le système des mouvements est représenté par la figure 4, dans l'hypothèse où $Z_0 = 0$, $Z_1 = 18$ et $u_0 = 0$.

## B. — LA NATURE DES MOUVEMENTS D'UN SYSTÈME NON PERTURBÉ

### 7. Les positions d'équilibre et les « mouvements d'équilibre ».

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons considérer d'une manière plus générale les mouvements que peuvent décrire les systèmes économiques de la nature déjà indiquée, y compris des cas plus généraux que celui de notre exemple central.

En utilisant les simplifications mathématiques indiquées au paragraphe 3, nous arriverons toujours à un système homogène et linéaire d'équations à différences finies ; il sera alors possible de trouver une ou plusieurs équations finales, déterminant les mouvements de certaines des variables, à la condition que certaines valeurs initiales soient données.

Posons-nous d'abord la question de savoir s'il y a des positions d'équilibre pour le système étudié, c'est à dire s'il y a des valeurs constantes des variables satisfaisant aux équations élémentaires ou à l'équation finale. Puisque celles-ci sont linéaires, il n'y a au maximum qu'une seule position d'équilibre : celle caractérisée, dans notre notation, par la valeur zéro de toutes les variables non barrées. Quand les grandeurs barrées sont des constantes rigou-

reusement déterminées, une telle position représente un équilibre statique ; cela entraîne la valeur zéro pour certaines des grandeurs constantes, comme par exemple le volume des nouveaux investissements (1). Si au contraire les grandeurs barrées ne sont qu'approximativement des constantes, c'est-à-dire quand elles évoluent lentement, il n'est pas nécessaire que certaines d'entre elles soient égales à zéro.

Du reste, l'hypothèse de la linéarité des équations élémentaires se fonde sur le fait que nous ne considérons que de petites déviations. L'abandon de cette condition rend vraisemblable l'existence de quelques équations non linéaires (par exemple les équations (1), (3), (4), qui le sont par leur nature même, tandis que nous possédons certaines indications qui montrent que l'équation (13) l'est en fait) ; il en découle la possibilité de plusieurs positions d'équilibre.

Dans notre exemple central, l'équation que l'on obtient après élimination de toutes les variables sauf $u$ et si nous supposons que toutes les grandeurs sont des constantes, prend la forme

$$u^3 + 0{,}63u^2 - 5{,}1u = 0.$$

d'où il résulte qu'il n'y a qu'une seule position d'équilibre à avoir un sens. En effet, les trois racines de cette équation sont

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = +1{,}96 \qquad \text{et} \qquad u_3 = -2{,}58.$$

dont les deux dernières sont trop éloignées de la zone possible pour avoir quelque signification.

Des équations finales, nous pourrons déduire les *équations caractéristiques* prenant la forme d'équations rationnelles, du degré $d$ par exemple. Une telle équation aura $d$ racines. Il n'est pas nécessaire, comme c'était le cas dans l'exemple central, que ces racines soient des nombres complexes. Parmi celles-ci, il peut y avoir des nombres réels, négatifs ou positifs. Cela signifie que le mouvement

---

(1) La démonstration remarquable due à M. WALD de l'existence d'une seule position d'équilibre (voir : *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 1934, n° 6, *herausgegeben von Karl Menger*) se rapporte à un système obéissant à certaines conditions qui ne sont pas remplies ici. La possibilité d'une pluralité d'équilibres a été mise en relief par P. LORENZ, Gegen einen gewissen Missbrauch mathematischer Formulierungen in der theoretischen Nationalökonomie, *Jahrb. f. Nationalök. und Statistik*, **134** (1931), p. 49 et J.-G. KOOPMANS, De mogelijkheid van een meervoudig economisch evenwicht, *De Economist*, 1932, p. 679, 766 et 841. Voir aussi notre article « Der Wert mathematischer Konjunkturtheorien » dans *Beiträge zur Konjunkturlehre*, Berlin, 1936.

général des variables étudiées présente des composantes différentes :

*a*) des composantes cycliques, amorties ou non, à périodes différentes (correspondant aux racines complexes de l'équation caractéristique) ;

*b*) des composantes cycliques, amorties ou non à période de deux unités de temps (correspondant aux racines négatives), et

*c*) des composantes non cycliques, soit dirigées vers la position d'équilibre (correspondant à des racines positives $< 1$), soit s'éloignant d'elle (correspondant à des racines $> 1$).

Ce sont les composantes du dernier caractère qui vont maintenant retenir spécialement notre attention. Si la racine en question est beaucoup plus grande que l'unité, de sorte que le mouvement s'éloigne avec violence du niveau d'équilibre, il est probable que les déviations de l'équilibre atteignent en peu de temps des valeurs pour lesquelles nos hypothèses et nos équations ne sont plus valables. Alors il se peut en fait que le mouvement qui y corresponde soit un mouvement plus ou moins cyclique, ce qui ne nous intéresse pas dans ce paragraphe. Nous en parlerons ultérieurement.

Si d'autre part, la racine en question ne dépasse que légèrement l'unité, le système peut rester dans la zone dans laquelle nos hypothèses sont vérifiées pendant un temps assez long. Le mouvement en question est alors un mouvement non-cyclique, un mouvement sans recul, que nous appellerons *mouvement d'équilibre* pour le distinguer des autres mouvements, aussi bien que de la position d'équilibre. Cette dernière distinction n'est tout à fait nette que dans le cas d'une position d'équilibre caractérisée par des valeurs rigoureusement constantes des « grandeurs barrées » de notre système. Si, au contraire, les « grandeurs barrées » varient lentement elles représentent elles aussi un mouvement d'équilibre (1). Il est probable qu'on peut effectuer une transformation des variables qui remplace un système « à grandeurs barrées constantes » par un système « à grandeurs barrées mouvantes ».

Quoi qu'il en soit, les mouvements d'équilibre peuvent être considérés comme l'idéal de la « stabilisation de la conjoncture (2) ».

(1) Dans l'exemple central, il n'y a pas de racines positives. Néanmoins le système considéré peut effectuer un mouvement d'équilibre parce que les grandeurs barrées ne sont pas des constantes, mais les valeurs de la ligne de la tendance générale.

(2) Nous croyons avoir approfondi ces considérations dans une étude récente intitulée « Einige Grundfragen der mathematischen Konjunkturtheorie », *Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung*, III (1937), p. 1.

## 8. Mouvements a petite amplitude : les baromètres et les périodes de décalage.

Ce sont les composantes mentionnées au paragraphe précédent

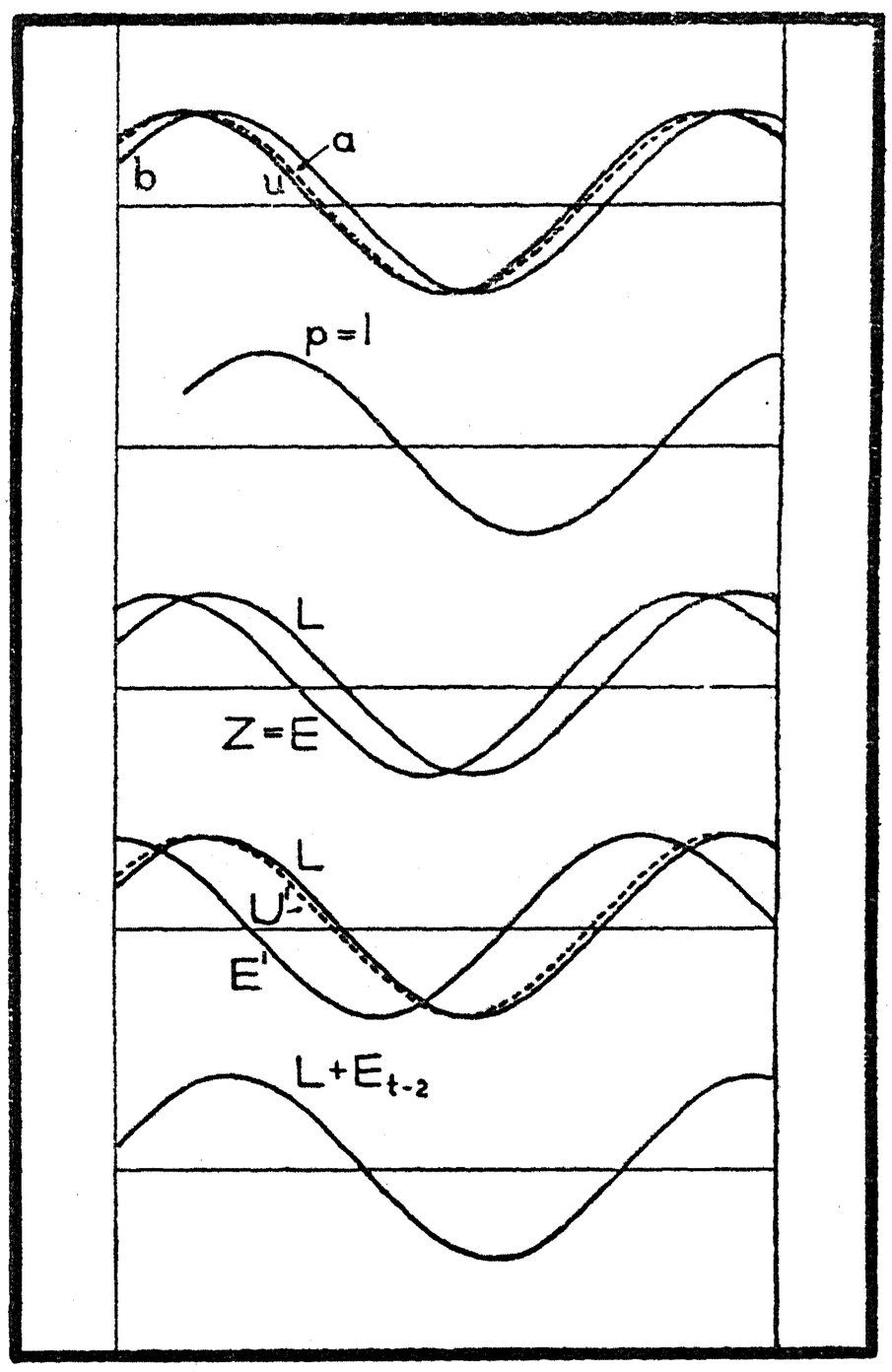


Fig. 5. — « Baromètre » du système considéré ; toutes les variables exprimées en « unités-types », c'est-à-dire de manière que les amplitudes sont égales, ce qui facilite l'observation des décalages.

sous *a*) et *b*) qui représentent les mouvements cycliques ou quasi-cycliques. Nous parlerons de mouvements quasi-cycliques, lorsque les périodes correspondantes aux différentes composantes sont des nombres incommensurables entre eux, le mouvement n'est alors jamais exactement périodique. Comme nous l'avons déjà vu,

dans l'exemple central, certaines grandeurs présentent une seule période, tandis que d'autres en possèdent deux. La deuxième période n'a pas grande importance, puisque les mouvements qui y correspondent présentent un amortissement très considérable.

De la même manière que nous l'avons démontré pour la variable $u$ dans l'exemple central, on pourra prouver que les variables n'apparaissant pas dans les équations finales révèlent des mouvements à composantes de même période et de même amortissement que les variables des équations finales, mais en général avec une amplitude relative (c'est-à-dire relativement à celle des autres variables) et un décalage bien déterminés.

L'ensemble des courbes ainsi calculées nous donne, d'après la figure 4, le « baromètre » du système (1). Dans cette figure les courbes ont été dessinées toutes à la même échelle afin de faciliter la comparaison des amplitudes dans la mesure où elles sont comparables. Si l'on veut détacher plus nettement les décalages successifs, il convient de prendre comme unités les écarts-types des grandeurs, comme il a été procédé dans la figure 5. Quelques-unes des périodes de décalage se déduisent immédiatement des équations élémentaires. Par exemple, on déduit ainsi de l'équation (10′) que les salaires et le coût de la vie (2) ne présentent aucun décalage l'un par rapport à l'autre, ou encore que le niveau des prix suit les ventes des biens de consommation à une distance de 9 mois [voir équation (9)]. D'autres périodes de décalage ne sont trouvées que par le processus indiqué plus haut.

## 9. Mouvements a grande amplitude.

Afin d'étudier les mouvements qui résultent d'une perturbation considérable, nous devons écarter l'hypothèse concernant les petites déviations : nous obtiendrons des équations non-linéaires. La solution générale devient très difficile et puisque dans la plupart de nos problèmes l'emploi des équations linéaires suffit, nous

(1) On n'oubliera pas qu'il s'agit des États-Unis. La situation des pays européens se présente tout autrement.

(2) On voit par exemple que les prix des biens de consommation et les salaires décèlent la conjoncture avec un certain délai ; que les revenus ouvriers sont plus stables que les revenus non-ouvriers et qu'ils marquent un retard sur ceux-là ; qu'au début de la hausse, c'est la demande non ouvrière et à la fin, c'est la demande ouvrière qui alimente le marché des biens de consommation.

n'en discuterons les conséquences que très globalement. Comme je l'ai montré dans un exemple encore plus simple que notre exemple central (1), ces conséquences sont assez remarquables. Il paraît que la période des mouvements d'un tel système dépend de la *grandeur* de la perturbation et qu'elle peut devenir infinie pour une valeur finie de la perturbation. Quand la perturbation surpasse cette valeur critique, le mouvement devient apériodique. Cette circonstance nous fournit des perspectives intéressantes et inattendues en ce qui concerne l'explication de la dernière crise aussi bien que le problème de la politique des conjonctures.

A côté de cet allongement de la période, on observe une déformation des cycles : la partie inférieure (c'est-à-dire la partie située sous la ligne des zéros) peut être plus longue que la partie supérieure. Il serait possible de faire des calculs analogues en ce qui concerne notre exemple central, en utilisant les équations élémentaires dans leur forme non-linéaire. Nous renonçons ici à ces calculs.

## 10. L'explication de l'amplitude des cycles.

Dans ce qui précède, nous avons vu que l'explication de l'amplitude des cycles se fait en premier lieu, à l'aide des perturbations dont les grandeurs figurent dans nos équations comme « valeurs initiales » de quelques variables. Quand plusieurs perturbations se succèdent, l'amplitude peut être une fonction assez compliquée de ces perturbations (2).

Cela vaut pour le cas des équations linéaires, en théorie, l'amplitude pourrait prendre toutes les valeurs possibles. Il y a cependant des indications qui permettent de penser que l'amplitude ne peut pas surpasser certaines limites. Pour être bref, on peut dire que toutes sortes de phénomènes de « saturation » (positive ou négative) s'y opposent. Cela se présentera sous forme d'équations non linéaires lorsque l'amplitude croît. Il y a dans ce domaine une masse de problèmes intéressants. Pour la politique des conjonctures ils ne sont cependant pas d'une grosse importance. L'objet

(1) *Ueber den Wert mathematischer Konjunkturtheorien, Beiträge zur Konjunkturlehre*, Berlin, 1936.

(2) Voir par exemple, *Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics, Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*, 1933, p. 171.

de cette politique étant d'arriver à un système plus ou moins stabilisé, c'est-à-dire ne présentant que de petites déviations du mouvement d'équilibre, on n'a à faire qu'à des cas où les équations linéaires sont valables. C'est pourquoi nous renvoyons à d'autres publications sur ce sujet (1).

## C. — LES PERTURBATIONS

### 11. Le caractère mathématique des perturbations.

Nous avons déjà introduit la distinction entre trois catégories de perturbations, à savoir :

1° les perturbations abruptes temporaires,

2° les perturbations abruptes permanentes,

3° les perturbations continues, dont la forme la plus importante est celle de la perturbation cyclique.

Des exemples seront donnés dans le paragraphe suivant.

Du point de vue mathématique, les perturbations se traduisent par des changements dans nos équations élémentaires et, par conséquent, dans les équations finales. Ces modifications peuvent se produire sur *les constantes additives* et sur les *paramètres multiplicateurs* de nos équations. Ces derniers, qui ne sont autres que des changements des coefficients élémentaires, sont à comparer aux changements de direction par exemple des courbes de demande, tandis que la première catégorie est analogue au « *shifting* » de ces courbes. En général, ces changements des coefficients sont significatifs de changements de structure du système économique Ainsi, un changement de $\alpha$ signifie que les investissements réagissent sur les profits d'une façon différente ; une diminution de $\pi$ équivaut à une rigidité accrue des prix, etc.... D'autre part, les changements des constantes additives seront souvent l'expression de circonstances modifiées. Lorsque, par exemple, dans une année la récolte est abondante, cela signifie que la production a augmenté

(1) Voir Hamburger, Analogie des fluctuations économiques et des oscillations de relaxation, *Indices du Mouvement des Affaires*, Paris, IX (1931), suppl. ; — J. Tinbergen, Annual Survey : Suggestions on quantitative Business Cycle Theory, *Econometrica*, 3 (1935), p. 241.

sans que les ventes précédentes se soient accrues ; l'équation (8) devient alors

$$u_t = u'_t + s,$$

$s$ indiquant l'excès de la récolte. L'introduction du terme $s$ constitue un changement additif. Quand cela se produit au cours d'une seule période élémentaire, l'interprétation mathématique la plus simple en est que la valeur « initiale » de $u_t$ pour les temps postérieurs à $t$ a changé ; $s$ étant donné, on pourra calculer le mouvement qui en résulte à l'aide des équations pour les périodes ultérieures.

Si, au contraire, dans toutes les périodes élémentaires à partir de $t$, un terme $s$ se maintient, l'interprétation la plus simple de ce fait est que la valeur d'équilibre de certaines variables a changé. Un exemple nous est fourni par le cas d'invention amenant une baisse du prix de revient de certains articles ; on aura, au lieu de l'équation (9)

$$p_t = \pi u'_{t-[9]} - \mathrm{S}.$$

Il conviendra alors d'introduire de nouvelles valeurs d'équilibre afin d'obtenir l'équation

$$\underline{p}_t = \pi \underline{u}'_{t-[9]},$$

où $\underline{p}_t$ et $\underline{u}'_t$ expriment les déviations du prix et de la production respectivement à partir de leurs nouveaux niveaux d'équilibre.

S'il y a lieu, on peut dire également qu'à chaque nouvelle période élémentaire correspondent d'autres conditions initiales.

## 12. Le caractère économique et le « siège » des perturbations.

Nous verrons que la plupart des perturbations qui jouent un rôle important dans l'interprétation des cycles ont le caractère de changements des constantes additives. Nous bornerons l'examen à cette espèce de perturbations. Du point de vue économique, la question devient importante de savoir dans quelle équation ce terme additif se trouve introduit. Nous le montrerons au paragraphe 31.

Maintenant, discutons quelques-uns des cas les plus fréquents

de perturbations du système économique, et déterminons leur « siège », c'est-à-dire l'équation ou les équations qui les contiennent.

Considérons d'abord le cas d'une invention. Il nous semble que sa répercussion s'étend à trois équations. C'est tout d'abord l'équation du travail qui en subira l'influence : le travail nécessaire à produire l'unité de produit sera réduit ; on aura

$$c_t = 0{,}9u_t - S_c, \tag{12.1}$$

au lieu de l'équation (7')

Deuxièmement, ce sera l'équation (9') du prix qui sera changée

$$p_t = \pi\, u_{t-2} - S_p, \tag{12.2}$$

parce que le prix de vente peut être abaissé. Il n'est pas nécessaire, naturellement, que la réduction du prix soit égale à la réduction du prix de revient. Il se peut que pendant quelque temps, le producteur de l'article en question bénéficie d'un profit supplémentaire.

La troisième influence de l'invention se manifestera dans l'équation (11') des investissements. Il se peut qu'avant qu'il y ait une augmentation des profits, les investissements augmentent en raison des profits attendus ; on aurait

$$b_t = \alpha Z_{t-1} + S_b \tag{12,3}$$

Des trois grandeurs $S_c$, $S_p$ et $S_b$ introduites, $S_c$ semble avoir un caractère permanent agissant sur la position d'équilibre de la société ; $S_p$ semble avoir un caractère semi-permanent dans ce sens qu'il peut être suivi par d'autres valeurs plus grandes à plus ou moins brève échéance, et $S_b$ a un caractère temporaire dans le sens qu'il disparaîtra peut-être après quelque temps (après la période nécessaire pour terminer la production des biens d'investissement). Dans le cas considéré, une série de détails détermine les valeurs de $S_c$, $S_p$ et $S_b$, et le maintien de ces valeurs au cours de périodes plus ou moins longues. La chose principale c'est que dans les équations mentionnées, ces perturbations ont leur point de départ. Elles se propagent de là à travers le système tout entier. Cela est exprimé par le fait que dans les autres équations n'apparaîtront en général qu'un moment plus tard des termes correspondants

aux perturbations $S_c$, $S_p$ et $S_b$. (Nous disons en général, puisque, par suite des simplifications introduites dans notre exemple central, on a négligé quelques périodes de décalage qui sans doute existent en réalité). Un exemple est fourni par l'équation (4′) relative à Z. Dans l'équation de Z pour la période $t$, ce sont seuls $S_c$ et $S_p$ qui entrent, à cause du délai négligeable entre $p$ et Z, et entre $c$ et Z. L'influence de $S_b$ ne commence à agir que dans la période suivante. Dans des périodes ultérieures, des influences de plus en plus indirectes atteignent Z comme par exemple celles agissant par l'intermédiaire de $E'_t$.

Un deuxième exemple est fourni par une *récolte exceptionnelle*, disons une récolte abondante. Ce fait aura les conséquences suivantes pour nos équations.

Tout d'abord, on constatera une baisse de quelques-uns des prix sans qu'une baisse du débit précède, c'est-à-dire qu'un terme supplémentaire s'ajoute dans l'équation du prix (9′)

$$p_t = \pi u_{t-2} - S_p. \tag{12.4}$$

En second lieu, la production de certains produits (au cas d'une récolte abondante de coton ce sont les manufactures de coton, par exemple) sera augmentée sans qu'une augmentation du débit la précède ; cela influencera l'équation de la production (8′)

$$u_t = u'_t + S_u. \tag{12,5}$$

La durée de ces perturbations ne sera que d'une année, en général ; ici nous avons à faire à des perturbations strictement temporaires. Tout comme dans le premier exemple, on constatera une diffusion successive de l'influence des termes supplémentaires sur les variables du système. Les variables des membres de gauche des équations (12.4) et (12.5) la montrent d'abord ; les variables qui sont déterminées, à leur tour, par $p_t$ et $u_t$ la montrent après leur période de décalage respective, etc. Nous donnerons un troisième exemple ayant une importance essentielle pour l'explication d'événements récents (1931), à savoir *la dévaluation d'une monnaie étrangère*. Quoiqu'un tel événement agisse dans bien des directions différentes, il me semble que les réactions principales se montrent dans les équations relatives à U′, $b$ et $m$. Dans la première de ces équations (5′) celle de U′, nous introduirons un terme supplémentaire indiquant que le débit diminue par la dimi-

nution du débit étranger ou par le fait d'une augmentation des importations. (Il sera utile de comparer cette proposition avec l'expression généralisée de l'équation (16) qui sera donnée au paragraphe 17). Dans l'équation (11') de $b$, la réaction de la dévaluation se manifestera par une diminution des investissements nouveaux, à cause du manque de confiance dans l'avenir. Dans l'équation de $m$, la même chose se traduira par une hausse spontanée du taux de l'intérêt.

Pour les applications, il est utile d'attirer l'attention sur le fait suivant. Quand on détermine l'équation finale, relative à $Z_t$ par exemple [c'est-à-dire l'équation analogue à (6.3)], pour un système perturbé, cette équation finale montrera, elle aussi, des termes supplémentaires. La forme de ces termes dépend du « lieu » des perturbations initiales. Si, par exemple, une perturbation $S_Z$ dans l'équation de Z lui-même se produit, on aura un terme additif $S_Z$. Si, au contraire, une perturbation $S_b$ dans l'équation de $b$ se présente, on aura un terme $\alpha S_b$ dans celle de Z. Cela devient important quand on veut comparer deux systèmes à valeurs différentes de $\alpha$ (voir 31).

## 13. Les mouvements d'un système perturbé.

Afin d'étudier les mouvements d'un système perturbé nous devons introduire une distinction entre les trois types de perturbations.

Les perturbations *abruptes passagères* ne donnent pas lieu à des difficultés spéciales. Comme nous venons de l'exposer, les mouvements d'un système soumis à de telles forces peuvent être décrits par les équations élémentaires en ajoutant des termes supplémentaires. L'extrapolation numérique dans un cas donné n'est pas difficile. Afin de trouver la solution synthétique, c'est-à-dire de trouver l'expression des variables en fonction du temps, nous avons à déterminer les constantes arbitraires des solutions discutées au paragraphe 6. Ces constantes seront déterminées par la condition qu'à des périodes élémentaires données, les variables en question possèdent une valeur découlant de la grandeur de la perturbation. Si, par exemple, la variable $b$ subit, au moment $t = 1$, une perturbation par laquelle sa déviation de l'équilibre sera à ce moment de 3 unités, nous avons la condition $b_1 = 3$.

La solution générale dans l'exemple central pour $Z_t$ est donnée par l'équation (6.8). Il s'en suit que

$$b_t = \alpha C e^{\rho(t-1)} \sin \left[ \frac{2\pi (t-1)}{T} - \theta \right] \tag{13.1}$$

Dans cette expression, les constantes C et $\theta$ sont arbitraires, tandis que $\alpha$, $\rho$ et T se déduisent rigoureusement des coefficients du système. En substituant dans cette expression la valeur $b_1 = 3$, pour $t = 1$, on obtient l'une des conditions auxquelles C et $\theta$ doivent satisfaire. L'autre condition peut être $b_0 = 0$ ; si de nouvelles perturbations ne se présentent pas, le mouvement est commandé par ces deux conditions là. Du moment qu'une nouvelle perturbation se fait sentir, par exemple dans la période 10, on aura d'autres conditions à remplir. Supposons que dans la période 9, la valeur de $b_t$, comme résultat du mouvement antérieur, est égale à — 5, tandis que dans la période 10 elle aurait été de — 2, si la nouvelle perturbation lui confère une valeur $b_{10} = +1$ au lieu de — 2, les conditions pour C et $\theta$ pour le mouvement suivant à la période 10 seront

$$-5 = \alpha C e^{9\rho} \sin \left( \frac{2\pi \times 9}{T} - \theta \right)$$

$$+1 = \alpha C e^{10\rho} \sin \left( \frac{2\pi \times 10}{T} - \theta \right).$$

De nouveaux problèmes se présentent quand un *changement abrupt permanent* apparaît. Les conséquences en sont premièrement que le système reçoit une déviation initiale de l'équilibre, (comme nous venons de le discuter) et deuxièmement, que la position d'équilibre se modifie. Afin de trouver ce déplacement de la position d'équilibre, nous nous demandons quelles valeurs *constantes* des variables répondent au système d'équations. Ce système diffère du système (1′) à (15′) par la présence de quelques termes additionnels. Supposons, pour fixer les idées, que la perturbation permanente que nous étudions consiste dans une contraction du marché étranger. Cela veut dire que, dans l'équation (5′) un terme — $S_u$ s'ajoute dans le membre déduit. Supposant constantes toutes les variables et omettant l'indice $t$, nous avons le système d'équations qui suit :

$$
\begin{aligned}
&(1s)\ \mathrm{L} = l + a. && (8s)\ u = u'.\\
&(2s)\ \mathrm{E} = \mathrm{E}' + \mathrm{E}''. && (9s)\ p = \pi u.\\
&(3s)\ \mathrm{U}' = 0{,}9p + 2u. && (10s)\ l = \lambda p.\\
&(4s)\ \mathrm{Z} = 0{,}9p + 2u && (11s)\ b = \alpha \mathrm{Z}.\\
&\qquad\qquad + \zeta_b b - l - c. && (12s)\ \mathrm{E} = \varepsilon \mathrm{Z}.\\
&(5s)\ \mathrm{U}' = \mathrm{L} + \mathrm{E}' - s_u. && (13s)\ \mathrm{E} = \varepsilon \mathrm{E}.\\
&(6s)\ a = c + b. && (14s)\ m = \mu_{\mathrm{M}} \widetilde{\mathrm{M}}.\\
&(7s)\ c = 0{,}9u. && (15s)\ \mathrm{M} = \mathrm{L} + \mathrm{E} - \mathrm{U}' - \mathrm{E}''.
\end{aligned}
$$

De ce système, nous pouvons déduire les valeurs d'équilibre de toutes les variables. Il est évident que ces valeurs, sauf celle de $m$, sont toutes proportionnelles à $s_u$ ; c'est le coefficient de proportionnalité qui est intéressant. Déterminons celui de la variable $a$ par exemple, le montant de travail (l'emploi), variable la plus essentielle pour la politique sociale. Nous aurons à éliminer toutes les autres « variables ». M et $m$ s'éliminent par l'omission des équations (14$s$) et (15$s$). en exprimant les grandeurs en Z et $u$, on aura

$$(4s') \qquad \mathrm{Z} = 0{,}9\pi u + 2u + \zeta_b \alpha \mathrm{Z} - \lambda \pi u - 0{,}9u.$$

$$(5s') \qquad 0{,}9\pi u + 2u = \lambda \pi u + a + \varepsilon(1 - \varepsilon')\mathrm{Z} - s_u$$

$$a = 0{,}9u + \alpha \mathrm{Z}.$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Z}(1 - \zeta_b \alpha) = u\left[2 + 0{,}9(\pi - 1) - \lambda\pi\right]$$

$$u\left\{0{,}9 + \frac{\alpha}{1 - \zeta_b \alpha}\left[2 + 0{,}9(\pi - 1) - \lambda\pi\right]\right\} = a.$$

L'équation (5$s'$) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
a &= s_u + u(0{,}9\pi + 2 - \lambda\pi) - \varepsilon(1 - \varepsilon')\mathrm{Z}.\\
&= s_u + u\left\{(0{,}9\pi + 2 - \lambda\pi) - \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon')}{1 - \zeta_b\alpha}\left[2 + 0{,}9(\pi - 1) - \lambda\pi\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$(13.2) \quad a = s_u \frac{0{,}9(1 - \zeta_b\alpha) + \alpha\left[2 + 0{,}9(\pi - 1) - \lambda\pi\right]}{\left[2 + 0{,}9(\pi - 1) - \lambda\pi\right](\alpha + \alpha\zeta_b + \varepsilon - 1)} = \varphi s_u.$$

On voit que l'action sur $a$ sera d'autant plus efficace que $\varphi$ sera

plus grand. En substituant les valeurs adoptées pour les coefficients, on a

$$\varphi = -3.0. \tag{13.3}$$

Si nous supposons que le débit à l'étranger dépend du niveau des prix $p_t$, l'équation (5$s$) devient

$$U' = L + E' - \eta p - s_u.$$

Nous aurons au lieu de (13.2)

(13.4)

$$a = s_u \frac{0{,}9(1 - \zeta_b\alpha) + \alpha\left[2 + 0{,}9(\pi - 1) - \lambda\pi\right]}{\left[2 + 0{,}9(\pi - 1) - \lambda\pi\right](\alpha + \alpha\zeta + \bar{\varepsilon} - 1) - \eta\pi(1 - \zeta_b\alpha)} = \varphi' s_u,$$

formule dont il sera fait usage plus loin (paragraphe 34).

Nous avons encore à attirer l'attention sur une autre particularité. Nous avons remarqué que la variable $m$ n'a pas une valeur constante : on trouve en effet, avec les simplifications introduites dans notre exemple, que

$$M = s_u,$$

c'est-à-dire que par unité de temps une création de crédits nouveaux égale à la diminution de la valeur du débit perdu. Cela entraîne $\widetilde{M} = s_u t$ et par conséquent

$$m = \mu_M s_u t,$$

qui est une fonction linéaire du temps, croissante avec lui. Ce n'est donc pas une *position* d'équilibre, c'est un mouvement d'équilibre pour cette variable, qui demeure sans influence sur les autres variables par suite du caractère symptomatique de $m$. Si $m$ n'était pas une variable symptomatique, plusieurs variables auraient décelé un *mouvement* d'équilibre (1).

Il se peut cependant — et cela prend de l'importance en vue des questions à traiter plus loin (paragraphe 35) — qu'après un certain laps de temps, un tel mouvement ne se trouve plus vérifié par les équations élémentaires qui sont par trop approchées.

(1) Pour la détermination de ce mouvement, on pourrait faire usage de la méthode de l'équation différentielle (paragraphe 19), en négligeant toutes les périodes de décalage, c'est-à-dire en s'en tenant seulement au caractère dynamique résultant des dérivées et des intégrales.

*Un exemple empirique d'une perturbation abrupte permanente* (il ne faut pas prendre ce terme au pied de la lettre) est fourni par la dévaluation de la livre sterling de 1931 et illustré d'une manière frappante par les figures 6 et 7. Dans ces figures le cours de l'indice de la production industrielle a été extrapolé à l'aide de

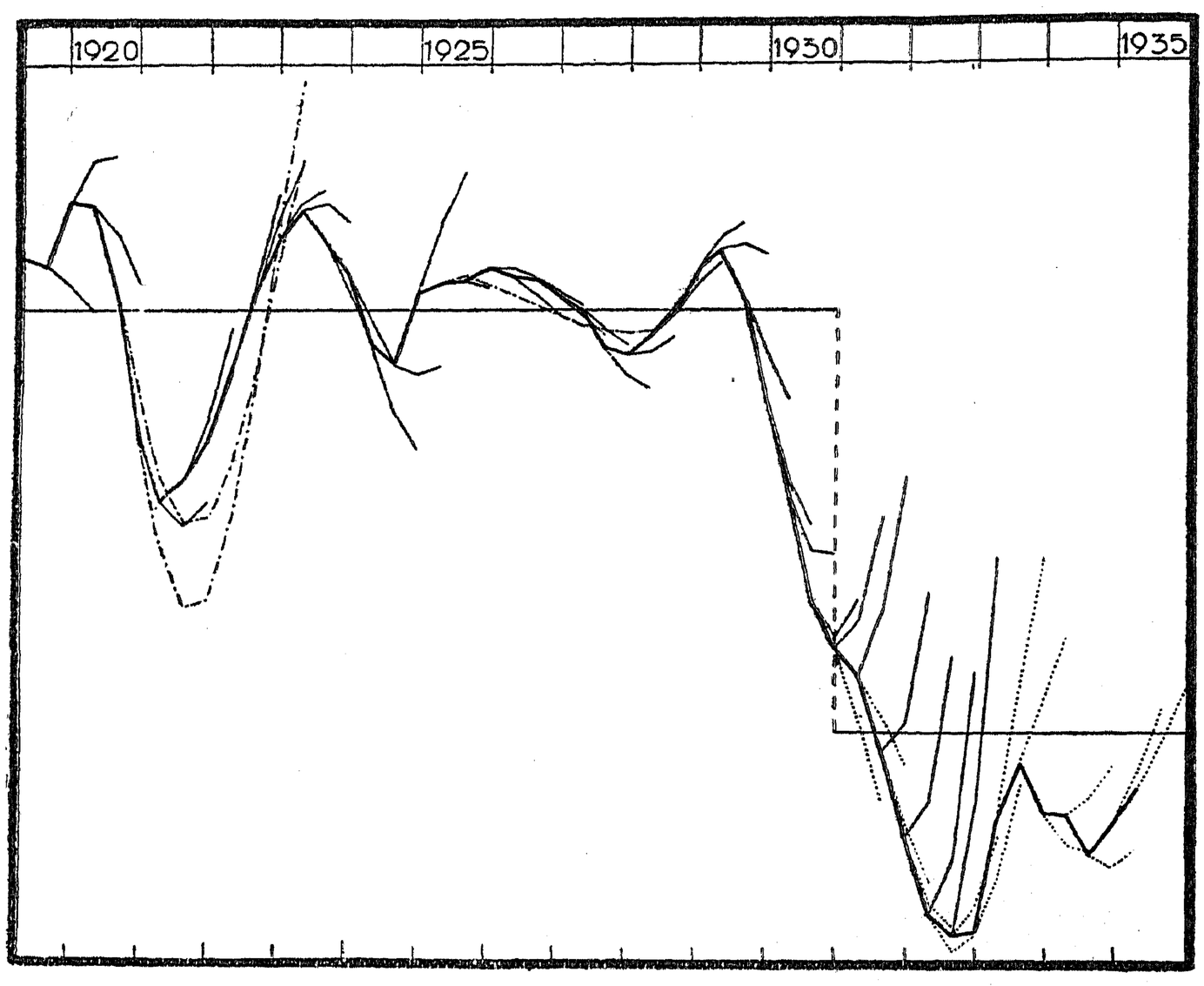


FIG. 6. — Extrapolation numérique, à l'aide de l'équation finale, des mouvements de la production industrielle.

——— série des observations.

——— extrapolations pendant 8 mois, basées sur la moyenne supérieure (voir ligne horizontale supérieure).

..... les mêmes, basées sur la moyenne inférieure. (voir ligne horizontale inférieure).

- - - - - - extrapolations répétées pour une période plus longue.

notre équation finale (6.5), (figure 6), et à l'aide d'une formule un peu différente (figure 7),

$$Z_t = 1{,}5Z_{t-1} - Z_{t-2}.$$

On a choisi l'indice de la production industrielle, car cet indice montre des mouvements sensiblement parallèles aux mouvements de Z (ce qui est d'ailleurs en accord avec nos équations). Cet indice

étant disponible mensuellement, on peut calculer des moyennes pour quatre mois. Ces moyennes présentent néanmoins encore des oscillations courtes que nous avons éliminées à l'aide de moyennes mobiles de 8 mois.

Avant d'expliquer la marche des calculs, remarquons que le choix de la ligne de tendance générale a une influence très mani-

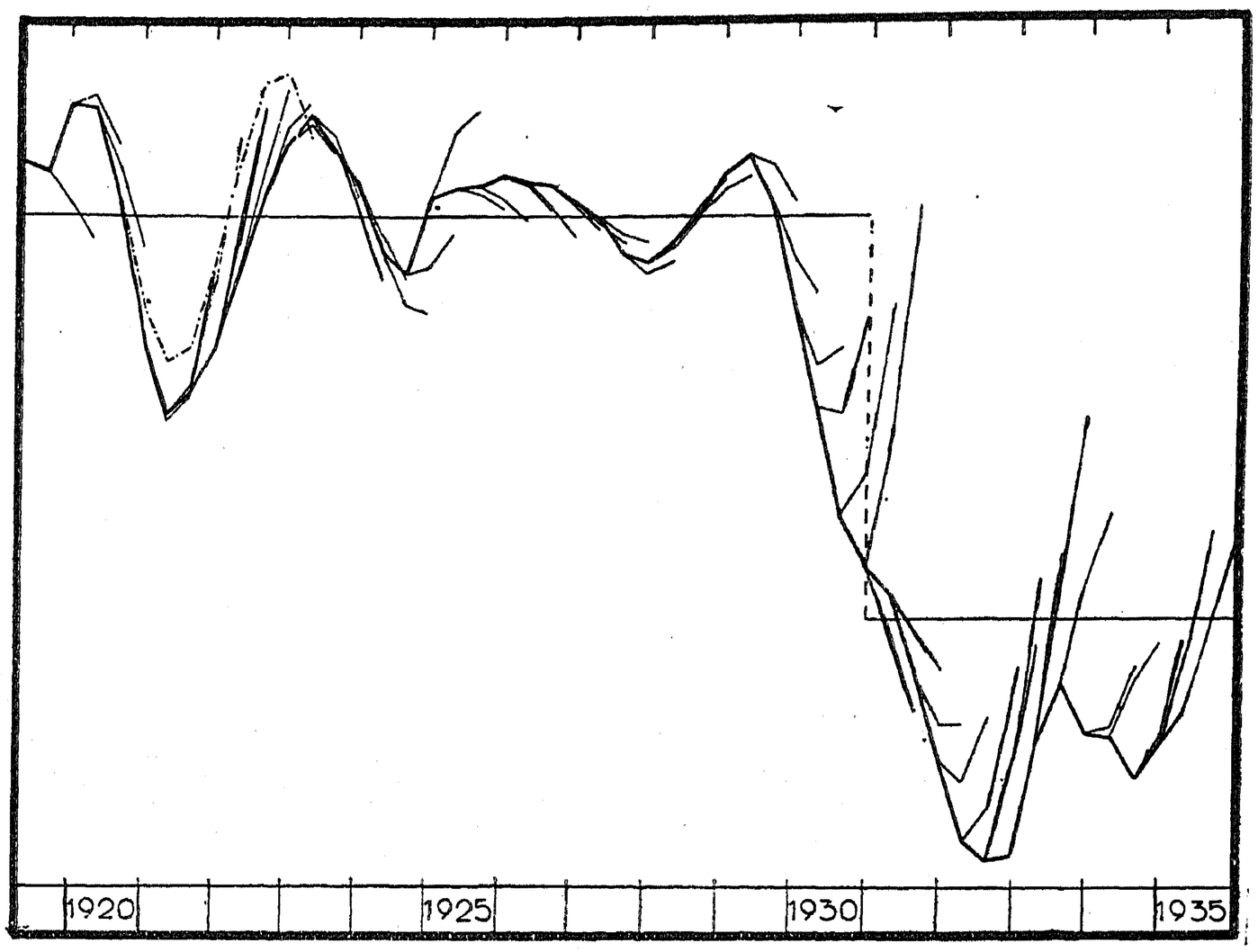


FIG. 7. — Extrapolation numérique à l'aide de la formule
$Z_t = 1{\cdot}5\, Z_{t-1} - Z_{t-2}$.
(Voir la légende de la fig. 6).

feste sur le résultat de l'extrapolation. Supposons qu'à un certain moment l'ordonnée de cette ligne est $\overline{Z} - \rho$ alors qu'on a pris $\overline{Z}$.

Le calcul donne $Z_t = 1{,}8Z_{t-1} - 1{,}0Z_{t-2}$.

Le calcul exact conduit à

$$Z'_t + \rho = 1{,}8(Z_{t-1} + \rho) - 1{,}0(Z_{t+2} + \rho).$$

Il en résulte que la valeur exacte $Z'_t$, mesurée comme déviation à partir de la ligne $\overline{Z}$, est liée à $Z_t$ par la relation

$$Z'_t = Z_t - 0{,}2\rho. \tag{13.5}$$

On peut en conclure que si l'extrapolation fournit à plusieurs reprises un résultat de $\sigma$ unités en-dessous de la valeur réelle, la position d'équilibre $\bar{Z}$ (qui peut être, comme nous l'avons déjà dit, insensiblement variable) doit être prise plus basse, à savoir

$$\bar{Z} - \frac{\sigma}{0.2} \tag{13.6}$$

Il est, en effet, très improbable que des perturbations aléatoires opèrent plusieurs fois dans la même direction.

De cette manière, il est possible d'obtenir des indications sur la ligne de tendance générale. C'est ce qui a été fait dans le cas des deux figures en discussion. On a commencé à calculer le *trend* rectiligne pour la période avril 1919-janvier 1930 ; les figures donnent le mouvement des déviations à partir de cette ligne (ligne continue). La formule d'extrapolation a été appliquée à ces déviations, c'est-à-dire au moyen de deux valeurs consécutives, une troisième valeur (extrapolée) ayant été calculée. La seconde et la troisième valeurs ont servi à établir une deuxième extrapolation pour arriver à déterminer à tout moment le mouvement pour huit mois. On voit qu'en général la tendance se trouve parfaitement vérifiée (lignes pointillées). Il est remarquable que l'accord est meilleur depuis 1929, quant à la première formule, il est meilleur avant 1929, quant à la seconde formule. (Une analyse plus poussée devrait tenir compte d'un changement graduel des constantes. C'est là un point d'un programme de recherches futures.) La deuxième formule a été élaborée de manière que la période du mouvement qu'elle représente concorde mieux avec la période des cycles jusqu'à 1929.

Nous désirons montrer maintenant que les extrapolations sont totalement dépourvues de signification à partir de septembre 1931. Ici on trouve qu'à plusieurs reprises, à peu près le même écart se révèle entre la réalité et les extrapolations. Quand nous calculons la correction à effectuer à la ligne du *trend*, selon la formule donnée plus haut (13.6), les extrapolations entre septembre 1931 et mai 1933 deviennent satisfaisantes (lignes pointillées). Il est probable qu'une correction de pas moins de 45 % du niveau de 1923-25 représente la répercussion « réelle » et psychologique de la dévaluation de la livre sterling. Il est intéressant de constater qu'une nouvelle perturbation est due aux mesures prises par le Président

Roosevelt. Cette perturbation a un caractère compliqué (1) et il est encore difficile de déterminer le changement de niveau d'équilibre qu'elle provoquera. Il y a, me semble-t-il, des facteurs qui tendent à surélever le niveau ; ces facteurs sont la dévaluation du dollar et les dépenses énormes de l'État. A côté d'eux, il y a des facteurs qui, comme l'augmentation des taux des salaires, tendent à faire baisser le niveau. Ce n'est qu'à titre provisoire que nous avons tracé les extrapolations données avec comme base de niveau de 1932.

Il n'est sans doute pas superflu d'ajouter que l'extrapolation, qui constitue la partie la plus ardue des recherches de la conjoncture, n'est pas l'objet principal des recherches reproduites dans cet ouvrage. Son objet principal est le problème de la politique, dont la solution est moins incertaine que celle relative aux problèmes de l'extrapolation et des pronostics.

Les problèmes des mouvements d'un système perturbé prennent un aspect tout à fait différent par l'introduction des *perturbations continues*, comme par exemple l'influence d'un mouvement cyclique dans la demande de l'étranger. Dans ce cas, au lieu des termes constants $s_u$, on aura des termes qui sont fonction du temps. L'élimination successive nous fournira une équation finale de la forme

$$(13.7) \qquad A_o Z_t + A_1 Z_{t-1} + \dots + A_n Z_{t-n} = f(t).$$

La solution générale sera une combinaison linéaire de la solution générale de l'équation homogène (c'est-à-dire où $f(t) = 0$) et d'une solution particulière de (13.7). Or, une solution particulière peut être donnée si $f(t)$ prend la forme (2)

$$B_1 y_1^t + B_2 y_2^t + \dots + B_m y_m^t$$

Cette solution s'écrira

$$_0Z_t = \frac{B_1}{\psi(y_1)} y_1^t + \frac{B_2}{\psi(y_2)} y_2^t + \dots + \frac{B_m}{\psi(y_m)} y_m^t$$

où $\psi(y_i) = A_0 y_i^t + A_1 y_i^{t-1} + A_2 y_i^{t-2} + \dots + A_{n-1} y_i + A_n.$

Le cas le plus important sera celui où $y_1$ et $y_2$ sont des nombres complexes conjugués, $y_3$ et $y_4$ d'autres nombres complexes con-

(1) Pour quelques détails, voir par exemple *De Nederlandsche Conjunctuur*, 1934.
(2) Je dois ces indications à mon ami P. DE WOLFF.

jugués, etc.... Cela signifie qu'un mouvement cyclique ou quasi-cyclique est imposé au système. Un cas simple et assez réaliste est celui où $y_3 = y_4 = \ldots = 0$.

Il est remarquable que la composante ${}_0Z_t$ a une amplitude entièrement déterminée par les constantes du système et par les constantes de la perturbation. Autre fait digne de remarque : des constantes arbitraires n'apparaissent que dans les autres composantes de $Z_t$ (1).

(1) Nous avons donné une application de cette formule dans notre étude intitulée *An econometric approach to business cycle problems*, Hermann, Paris, 1937.

CHAPITRE II

# LES ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES

## A. — LES ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES ET LA THÉORIE STATIQUE

14. — Il nous semble utile de discuter brièvement les relations et les différences entre les équations données au paragraphe 4 et les équations connues de la théorie statique générale.

D'une part, les équations élémentaires de notre schéma sont plus approximatives que les équations statiques. Elles le sont d'abord par leur caractère macro-dynamique ; elles peuvent être considérées comme l'addition d'un grand nombre d'équations analogues. Telles sont les équations (8), (9), (12) et (15). On peut imaginer que ces équations sont le résultat de l'addition d'équations pour chaque branche d'activité.

Les équations élémentaires apparaissent également plus approximatives parce que certaines grandeurs économiques y ont été considérées comme constantes et données, tandis que dans la théorie générale ces mêmes grandeurs sont déterminées par d'autres équations.

Il en est ainsi de toutes les grandeurs représentées par des symboles grecs qui ont le caractère d'élasticité ou de grandeurs similaires. Il en est de même de toutes les valeurs d'équilibre. On pourrait le justifier en disant que l'explication de ces grandeurs peut se faire à l'aide d'équations ne contenant que des grandeurs constantes ou considérées telles (voir paragraphe 1) et qui, par conséquent ne sont pas intéressantes pour la connaissance du mouvement.

Les équations ont enfin un caractère plus approximatif parce qu'on y a négligé certaines grandeurs qui en principe devraient y entrer. Considérant l'équation (9) on pourrait supposer qu'à côté du débit d'autres grandeurs encore ont une influence sur la formation des prix. Ces autres influences ont été négligées [1] dans l'équa-

(1) Comme on le sait, l'omission d'influences aléatoires n'a pas le caractère d'une approximation (voir paragraphe 1). Il n'est ici question que des influences systématiques.

tion (9) eu égard à l'hypothèse d'après laquelle ces influences agissent sur le niveau d'équilibre et non sur les déviations de ce niveau.

Cela posé, il n'est pas difficile de reconnaître dans nos équations élémentaires plusieurs des équations de la théorie statique. Certaines d'entre elles sont des équations budgétaires, comme (2), (5) et (8). D'autres sont des équations de la demande ou de l'offre, par exemple (14).

D'autre part, il y a quelques équations qui déterminent un *processus plus détaillé* que ne le font les équations statiques. Ce sont surtout les équations à caractère dynamique, comme par exemple (9) et (10). Alors que la théorie statique ne nous renseigne que sur la hauteur du niveau d'équilibre des prix, l'équation (9) nous décrit les étapes consécutives par lesquelles passe le niveau des prix avant que le niveau d'équilibre soit atteint, que cette position se réalise ou non. L'équation (10) surtout dans sa forme primitive a la même fonction en ce qui concerne les salaires. Ces équations sont analogues aux équations données par exemple par Ricci [1] à titre d'illustration, à propos de l'économie synthétique de Moore.

## B. — LA DÉTERMINATION STATISTIQUE DES COEFFICIENTS ÉLÉMENTAIRES

### 15. Remarques générales.

Nous allons exposer brièvement la méthode de détermination statistique des coefficients élémentaires, en nous reportant spécialement à notre exemple central, sans discuter les problèmes de statistique théorique qui pourraient se présenter.

Comme nous l'avons déjà remarqué, c'est la théorie économique qui doit nous renseigner sur la nature des relations déterminant chaque variable. Nous avons déjà discuté le caractère de la théorie macrodynamique dont nous allons faire usage. Nous pouvons ajouter qu'il y a de nombreux problèmes dans ce domaine qui demeurent irrésolus, et qu'il est bien possible que les équations

(1) Die synthetische Ökonomie von Henry Ludwell Moore, *Zeitschrift fur Nationalökonomie*, I (1930), p. 649.

choisies soient dans l'avenir remplacées par d'autres. Il sera utile, à notre avis, que la discussion porte sur ces relations mises en équations et non pas dans une forme plus ou moins vague comme nous le voyons encore trop souvent.

Bien que la théorie économique doive être notre guide dans la recherche des équations élémentaires, il ne faut pas oublier que cette théorie elle-même peut être influencée et réformée par les résultats des recherches statistiques. Aussitôt qu'une relation posée par une théorie quelconque ne se conforme plus à la réalité — fait que décélera l'analyse statistique —, nous sommes dans l'obligation de modifier cette théorie. Il va sans dire que les équations élémentaires choisies dans notre exemple central sont, elles aussi, le résultat d'une confrontation entre la théorie et le contrôle statistique. Nous en rencontrons des exemples très nets.

Une autre remarque de caractère général se rapporte à la difficulté d'obtenir exactement les chiffres exigés par la théorie. Cette difficulté est considérable, surtout quand on étudie, non seulement l'industrie dans le sens restreint du mot, mais la société économique dans son intégralité. En général, les données concernant l'industrie sont assez complètes, alors que celles concernant toutes les autres branches d'activité sont plutôt rares. C'est aussi dans ce sens que nos résultats ont un caractère provisoire. Recueillir et calculer des données plus nombreuses nous paraissent des opérations essentielles dans ce domaine.

Le tableau ci-joint donne les résultats de calculs laborieux qui ont été nécessaires pour obtenir des valeurs approximatives de nos variables. Le mode de calcul a été indiqué dans les notes explicatives. On verra qu'il s'agit seulement d'une première tentative grossière ; beaucoup d'études détaillées et spéciales seraient désirables, qui cependant ne peuvent être entreprises que par une institution bien équipée.

La plupart des calculs ne donne lieu à aucune difficulté de principe de quelque importance. Il y a cependant certaines difficultés en ce qui concerne les revenus et l'épargne, où faute de connaissances plus précises, nous sommes contraints de formuler différentes hypothèses alternatives. Nous avons supposé ici que les gains spéculatifs proviennent de crédits créés par le système bancaire, ce qui veut dire qu'ils ne sont pas payés à l'aide de l'épargne d'autres personnes. Il s'en suit qu'il n'y a pas de différence entre l'épargne

**DONNÉES STATISTIQUES CONCERNANT LA VIE ÉCONOMIQUE DES ÉTATS-UNIS, 1919-1932, EMPLOYÉES DANS L'EXEMPLE CENTRAL**

Tous les chiffres sont exprimés en pourcent des unités choisies (voir paragraphe 2).

| N° | Nomenclature | Symbole | Unité | 1919 | 1920 | 1921 | 1922 | 1923 | 1924 | 1925 | 1926 | 1927 | 1928 | 1929 | 1930 | 1931 | 1932 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Quantité des biens de consommation vendus | $\bar{u}' + u'$ | ø 1919-32 = 0,9 | 77 | 72 | 74 | 84 | 86 | 89 | 93 | 100 | 101 | 105 | 111 | 98 | 87 | 80 |
| 2 | Nombre total des heures travaillées ..... | $\bar{a} + a$ | ø 1919-32 = 1 | 95 | 94 | 86 | 94 | 104 | 105 | 108 | 111 | 112 | 111 | 115 | 104 | 89 | 71 |
| 3 | Heures travaillées dans la production des investissements nouveaux ..... | $\bar{b} + b$ | comme (2) | 23 | 24 | 16 | 20 | 24 | 21 | 22 | 24 | 21 | 21 | 23 | 18 | 13 | 10 |
| 4 | Prix des biens de consommation ..... | $\bar{p} + p$ | ø 1919-32 = 2 | 210 | 240 | 206 | 195 | 201 | 204 | 208 | 208 | 204 | 201 | 201 | 193 | 174 | 156 |
| 5 | Taux des salaires..... | $\bar{l} + l$ | ø 1919-32 = 1 | 88 | 110 | 99 | 95 | 99 | 101 | 103 | 105 | 106 | 107 | 109 | 104 | 94 | 80 |
| 6 | Taux de l'intérêt ..... | $\bar{m} + m$ | % | 573 | 674 | 676 | 548 | 550 | 511 | 498 | 506 | 488 | 534 | 604 | 507 | 461 | 505 |
| 7 | Valeur totale des biens de consommation vendus ..... | $\bar{U}' + U'$ | 34,4 × 10⁹ $ | 163 | 173 | 153 | 165 | 174 | 182 | 194 | 209 | 206 | 212 | 223 | 189 | 153 | 125 |
| 8 | Somme totale des salaires ..... | $\bar{L} + L$ | » | 83 | 102 | 85 | 89 | 102 | 105 | 110 | 116 | 116 | 117 | 125 | 108 | 83 | 57 |
| 9 | Somme totale de tous les autres revenus ... | $\bar{Z} + Z$ | » | 107 | 98 | 70 | 89 | 101 | 105 | 124 | 119 | 122 | 138 | 132 | 90 | 62 | 42 |
| 10 | Idem, non compris les revenus non distribués | $\bar{E} + E$ | » | 95 | 94 | 78 | 84 | 94 | 101 | 116 | 113 | 119 | 131 | 126 | 105 | 86 | 68 |
| 11 | Partie dépensée de (10) ..... | $\bar{E}' + E'$ | » | 74 | 72 | 59 | 65 | 73 | 80 | 96 | 87 | 95 | 111 | 107 | 78 | 65 | 53 |
| 12 | Partie épargnée ou thésaurisée ..... | $\bar{E}'' + E''$ | » | 21 | 22 | 19 | 19 | 21 | 21 | 20 | 26 | 24 | 20 | 19 | 27 | 21 | 15 |
| 13 | Crédits créés par le système bancaire ..... | $\bar{M} + M$ | » | 12 | — 6 | — 6 | — 7 | — 2 | — 6 | — 5 | — 1 | — 2 | — 3 | — 0 | — 6 | — 8 | — 7 |

*Notes explicatives sur le calcul des séries :* ø = moyenne

1. $\bar{u}' + u' = \dfrac{\bar{U}' + U'}{\bar{p} + p}$. 2. $\bar{a} + a = \dfrac{\bar{L} + L}{\bar{l} + l}$. 3. Indice de la somme totale des salaires des industries des biens d'investissements (calculée d'après les indices des " *pay rolls* " de la *Fed. Reserve Board*), divisé par l'indice des salaires par heure selon la *Nat. Industrial Conf. Board ;* ce quotient a été réduit à la base ø 1919-32 = 20, puisque la valeur de la formation brute de capital est environ un cinquième de la valeur du revenu national. 4. Indice du coût de la vie (*Nat. Ind. Conf. Board*). 5. Indice des salaires par heure dans l'industrie selon le *Handbook of Labor Statistics*, complété pour les dernières années à l'aide de chiffres pour l'état de New-York ; indice des salaires dans l'agriculture selon le *Handbook of Labor Statistics* et le *Yearbook of Agriculture*. Pondération : industrie, etc. 10 ; agriculture 1. 6. Taux des banques selon le *Federal Reserve Board, (rate charged customers by banks in eight other northern and eastern cities)*. 7. Chiffres basés sur des calculs de Warburton, *Journal of the American Statistical Association*, 1934 (XXIX), p. 383, interpolés et extrapolés à l'aide de nombreuses autres séries : indices de la production de biens de consommation selon le *Federal Reserve Board*, indice du coût de la vie (voir 4), indices de la valeur de la production agricole (production animale), indices sur le loyer total (*America's Capacity to Consume, Brookings Institution*, 1934), indice du revenu des chemins de fer relatif au transport des voyageurs ; indice de la valeur de la consommation d'essence de pétrole. 8. Salaires des ouvriers (*wages*), augmentés de la moitié des salaires des employés (*salaries*) et des pensions ; jusqu'à 1929 d'après *America's Capacity to Consume* (*Brookings Institution*), depuis 1930, d'après les chiffres du Département du Commerce *Survey of Current Business*, août 1935, p. 16), multipliés avec un facteur adéquat. La légère différence entre la moyenne de la série obtenue et de la moyenne de la série 9 a été négligée, ce qui veut dire que les chiffres obtenus sont multipliés avec 0,98.

9. Somme des dividendes, des intérêts, des rentes, des revenus d'entrepreneurs privés, des profits sur le capital (*capital gains*, représentant les profits spéculatifs) et de la moitié des salaires des employés et des pensions. Chiffres selon les sources mentionnées (complétées pour les profits spéculatifs à l'aide d'évaluations). 10. Série 9, diminuée des profits non distribués (*business savings*) ; sources mentionnées.

11. $\bar{E}' + E' = E - E'' + \bar{E} - \bar{E}''$. 12. Chiffres de *Warburton, l. c.*, (" *gross savings* " — " *returned to income stream* "), avec interpolation et extrapolation à l'aide de chiffres du *Statistical Abstract of the United States*. (*Some major savings items ; income statistics*) et à l'aide d'estimations.

13. Somme de l'augmentation de la monnaie en circulation et de l'augmentation des dépôts à vue chez les banques.

brute et l'épargne nette telles qu'elles sont définies par Warburton (*l. c.*). Cet auteur, après avoir calculé l'épargne brute à l'aide d'évaluations, déduit de cette somme un montant qu'il appelle " *returned to income stream* " et qui est formé surtout par les gains spéculatifs. (D'après son hypothèse, la plupart de ces gains sont payés à l'aide de l'épargne d'autres personnes.) Il reste à savoir lequel des deux chiffres donnés par Warburton doit être retenu. Dans cette étude, nous avons retenu l'épargne nette, d'après les calculs de l'auteur cité, qui sont en bon accord avec les montants dépensés pour les nouveaux investissements, tandis que l'épargne brute ne peut pas être contrôlée directement. On aurait sans doute pu choisir le montant brut ; c'est ce que nous avons fait dans une autre étude (1) où du reste nous aboutissons à des conclusions tout à fait analogues à celles obtenues dans la présente étude.

Ces remarques faites, discutons brièvement l'établissement des équations élémentaires de l'exemple central. Dans cette discussion nous pouvons distinguer deux types d'équations. Il y a tout d'abord des équations dont nous avons simplement admis qu'elles sont exactes. Nous les avons utilisées en vue du calcul d'une de ces variables. Il va sans dire que cela ne peut pas se faire avec des équations dans lesquelles il y a un coefficient inconnu *a priori* (un de nos coefficients grecs). Les équations suivantes ont servi dans ce but :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| l'équation | (1) | pour | en | calculer | $a_t$ (2) ; |
| » | (2) | » | » | » | $E_t^g$ ; |
| » | (3) | » | » | » | $u_t'$ (2) ; |
| » | (8) | » | » | » | $u_t$. |

Les autres équations ont été choisies, quant aux coefficients grecs, de manière à aboutir à des coefficients de corrélation maximum. C'est dire que les coefficients grecs ont été pris égaux aux coefficients de régression dans les équations de la forme donnée ci-dessus, avec cette seule généralisation qu'une ligne de tendance générale a été supposée exister dans les cas où cela semblait nécessaire. Parmi les différents plans de régression, on a choisi celui déterminé par les conditions suivantes :

(1) On the theory of business cycle policy, *Econometrica*, 5, 1937.

(2) Au cours des calculs numériques, cette équation a été mise à contribution dans sa forme exacte (non-linéaire).

1° les coefficients de régression sont proportionnels aux coefficients qu'on obtient quand la variable du membre à gauche est considérée comme variable dépendante et inexacte, alors que les autres sont supposées être variables indépendantes et exactes ;

2° leur valeur absolue est telle que l'écart type de la variable observée et celui de la variable calculée sont égaux.

Désignant d'une manière générale, les variables par $x_1$, $x_2$, ...., où $x_1$ est la variable dépendante, et les coefficients utilisés par $b_2$, $b_3$, ... ceux-ci sont, en usant de la notation usuelle :

$$b_2 = \frac{b_{12\cdot 3\cdots n}}{R_{1\cdot 23\cdots n}}.$$

Les périodes de décalage ont été déterminées de manière à avoir un maximum de corrélation. Pour quelques variables, nous ne disposons cependant que de chiffres annuels ; la détermination des décalages résulte donc d'une évaluation approximative.

Le degré de concordance entre les variables observées et calculées est illustré par la figure 3 (1).

## 16. Discussion statistique des équations élémentaires.

Les remarques suivantes (numérotées comme les équations auxquelles elles se rapportent) nous sont suggérées à propos d'un certain nombre d'équations.

(4) *Le calcul des profits* (fig. 8). — Le fait le plus remarquable que révèle la courbe des « profits », $Z_t$, est l'antécédance très nette des maxima sur ceux de l'activité générale, comme celle-ci s'exprime par la courbe $u_t$ ainsi que par $b_t$. Ce fait ne s'explique que par une influence de la vitesse des variations de quelques grandeurs se développant parallèlement à la conjoncture. Cette circonstance semble pouvoir être interprétée d'une façon satisfaisante par la formation des revenus spéculatifs, ce qui d'ailleurs est d'accord avec quelques analyses statistiques. La figure suggère que l'in-

(1) Les recherches ont été effectuées en deux étapes. Premièrement, on a déterminé globalement à l'aide de graphiques, si les variables du membre droit de chaque équation peuvent approcher suffisamment les variables de ce membre ; et ce n'est que lorsque des résultats acceptables s'annonçaient qu'on a procédé à des calculs plus précis.

fluence de $\dot{Z}_t$ est curviligne (cette influence est relativement plus grande lorsque $\dot{Z}_t$ est grand que lorsque celui-ci est petit).

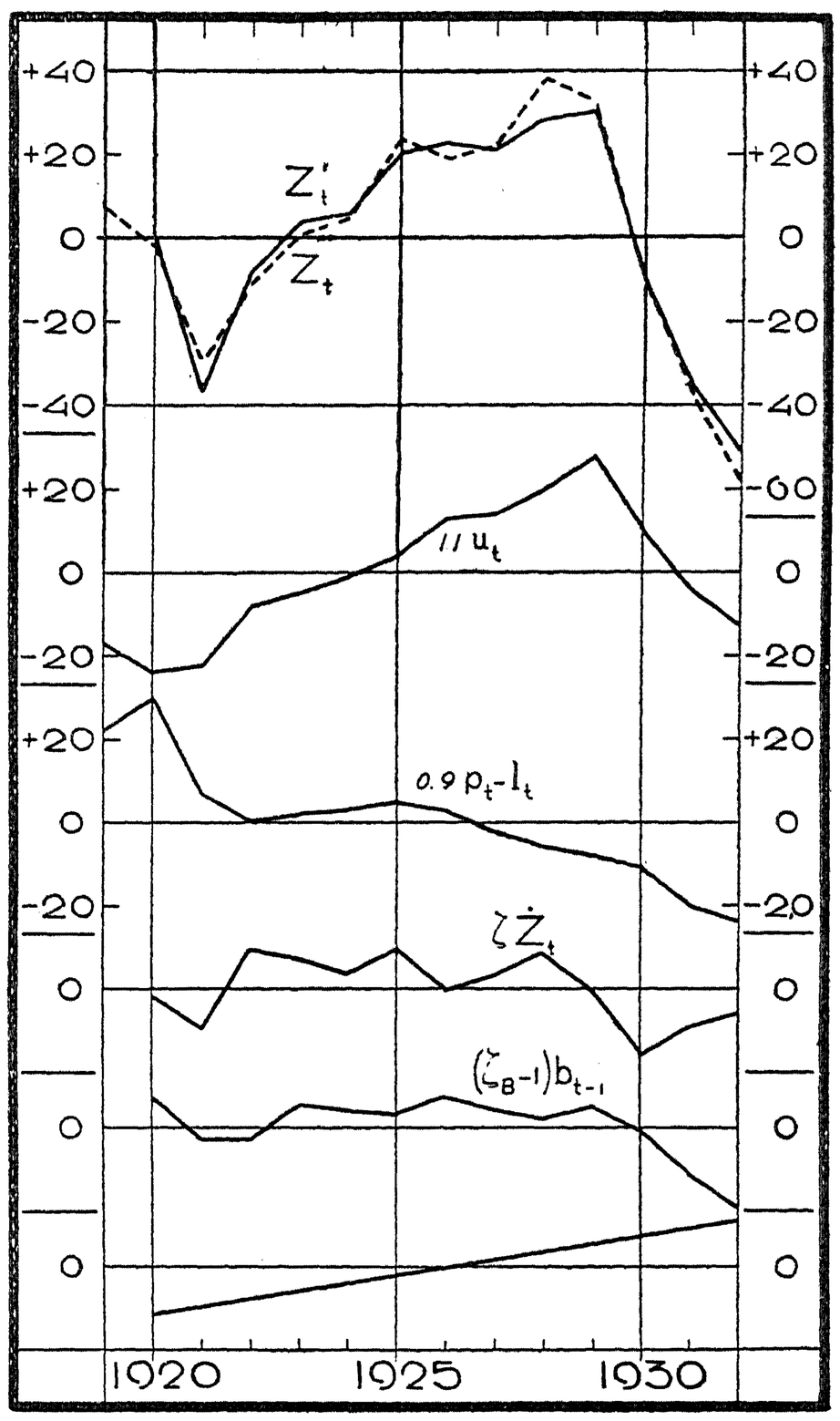


FIG. 8. — « Explication » des mouvements des profits $Z_t$. Dans les figures 8-16, la courbe pointillée représente la série observée, tandis que la série supérieure en plein trait indique les valeurs calculées à l'aide de la formule vérifiée. Les autres courbes indiquent, à une échelle comparable, les composantes de la série calculée. L'expression analytique des composantes a été indiquée à côté et correspond aux membres de l'équation en question

La valeur de $\zeta_B$ est assez incertaine. Quand on adopte la période 1920-1932 comme base des calculs, on trouve environ la valeur 5 ;

cependant prenant la période 1919-1930 (1), cette valeur décroît sensiblement et est approximativement égale à 2.5 ; nous avons choisi en définitive 3.5. Cela est assez arbitraire ; il sera nécessaire

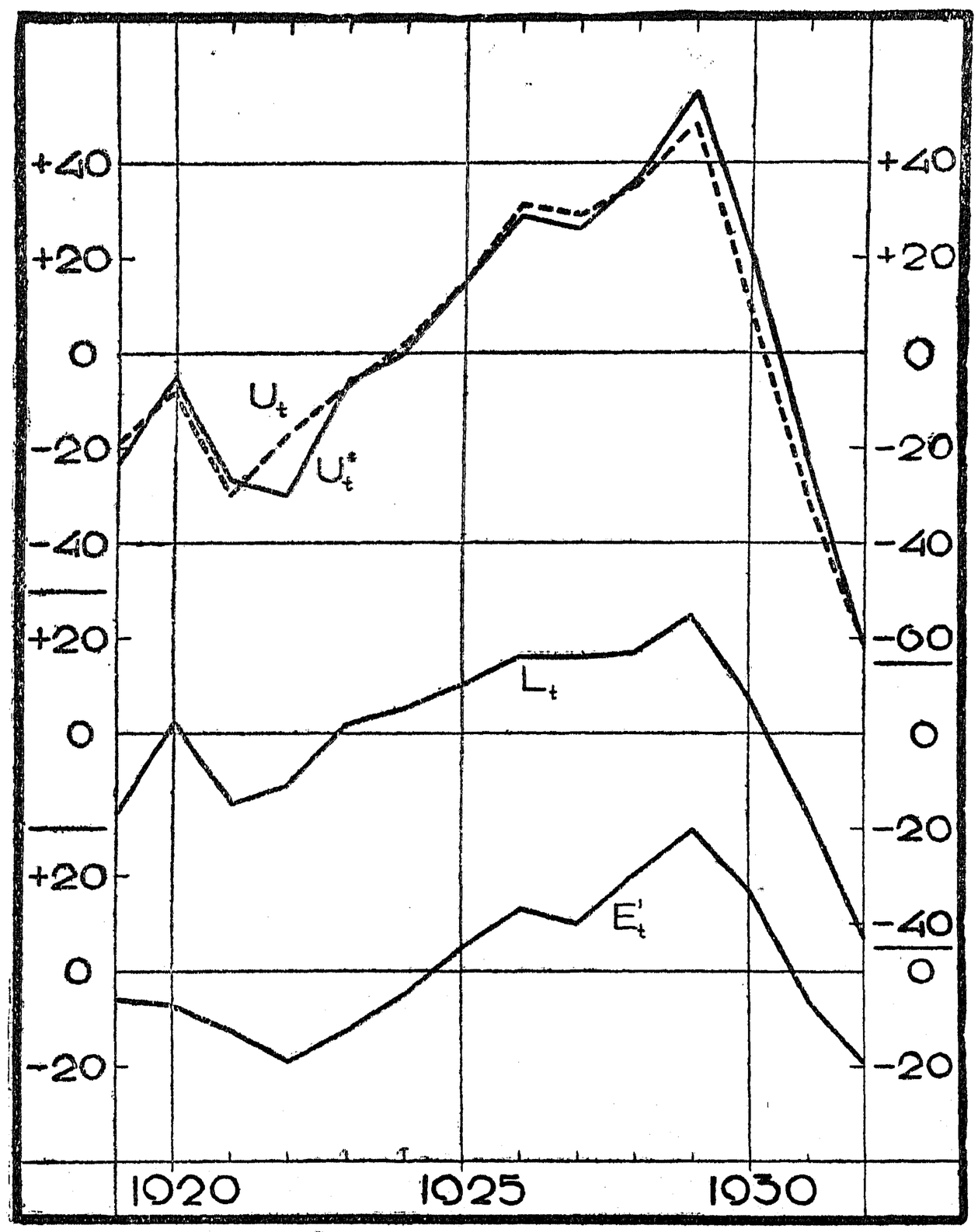


FIG. 9. — « Explication des mouvements du débit des biens de consommation (voir fig. 8).

que l'on précise, par des recherches plus détaillées, la valeur de ce coefficient. Dans notre exemple central, il a une influence très nette sur la longueur de la période. En considération de ce fait, il ne faut pas perdre de vue l'exactitude très relative de la longueur que nous

(1) Nous avons adopté cette période parce que la prévision d'une dévaluation de la livre sterling en 1931 avait eu une influence nullement négligeable sur Z.

avons trouvée. Il est cependant important de retenir, comme nous l'avons déjà affirmé, que les problèmes de la politique conjoncturelle ne sont pas sérieusement influencés par les grandeurs de $\zeta_B$ et de la période du mouvement « naturel ».

(5) *Le débit des biens de consommation* (fig. 9). — Il est remarquable que la corrélation soit mauvaise si l'on suppose que les

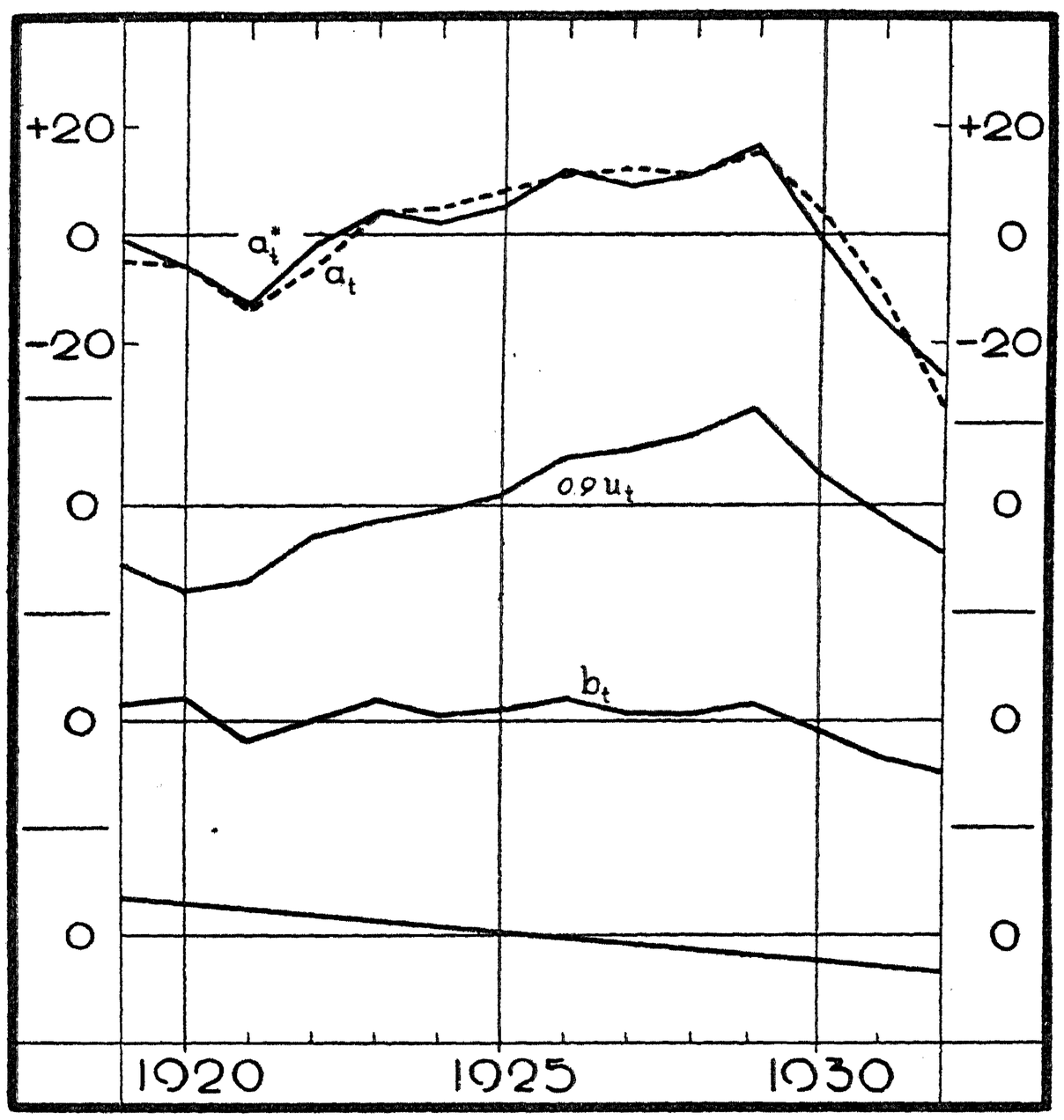


FIG. 10. — « Explication » des mouvements de l'emploi (voir fig. 8).

revenus non-ouvriers sont dépensés immédiatement. C'est pourquoi nous postulons un certain décalage. Même avec un décalage, la déviation de l'année 1922 est peu satisfaisante.

(6, 7) *Les équations du travail* (fig. 10). — Il semble que la corrélation pourrait être améliorée encore un peu en supposant que $c_t$ présente un certain décalage. Pour l'année 1932, on voit que l'hypothèse trop simple relative à la productivité du travail n'est plus valable : la productivité étant remarquablement élevée cette année-là.

(9) *Les prix* (fig. 3, page 20). — Quoique la corrélation ne soit pas aussi bonne qu'on pourrait le souhaiter, il est remarquable qu'aux environs de 1920 les deux courbes se ressemblent plus que, par exemple, l'une de ces courbes d'une part et de l'autre $Z_t$, $E_t$ ou $a_t$ ne ressemble à $p_t$. Nul doute ne subsiste du reste sur la période de décalage qui est en effet considérable, 9 mois.

(10) *Les salaires* (fig. 3, page 20). — Un fait remarquable se présente : contrairement à l'expérience d'autres pays et d'autres

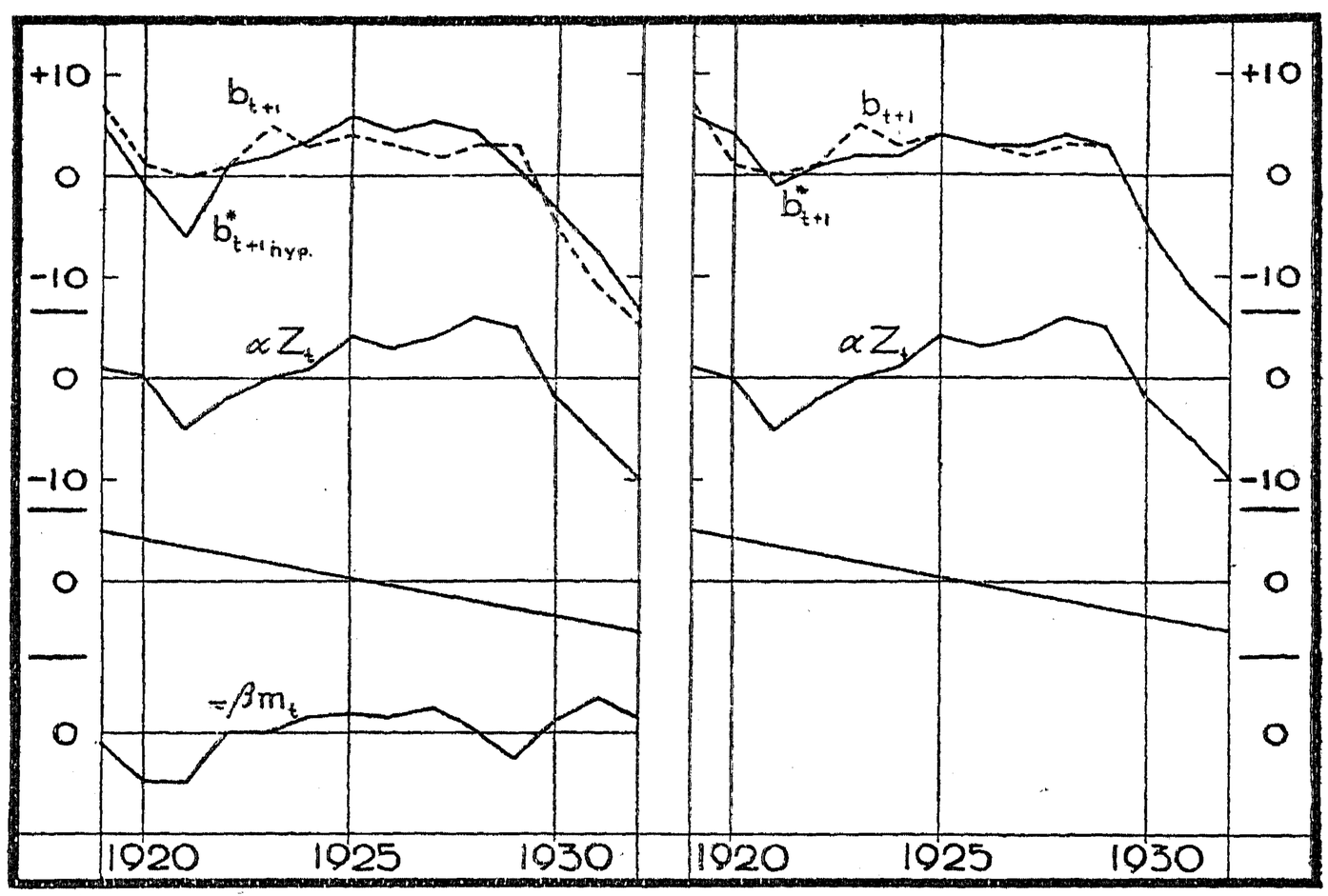


FIG. 11. — « Explication » des fluctuations de l'emploi dans les industries de biens d'investissement (l'expansion) (voir fig. 8).

périodes, l'influence de l'emploi semble être négligeable. Ce résultat n'est du reste pas certain, à cause de la haute corrélation existant entre les deux facteurs déterminants $\tilde{a}$ et $p_{t-[10]}$. La valeur du coefficient 0.63 est elle aussi remarquable ; elle signifie que le pouvoir d'achat du salaire horaire aux États-Unis est plus bas au cours de la dépression qu'au cours de la prospérité, fait qui en général ne se présente pas en Europe. L'adaptation des salaires est donc rigoureux en Amérique ; le système des salaires proportionnels aux nombres indices du coût de la vie aurait eu pour conséquence un mouvement plus stable des salaires !

(11) *L'Expansion* (fig. 11). — L'influence souvent présumée du

taux de l'intérêt sur l'expansion n'a pu être découverte (1). Afin de montrer plus nettement ce qu'en effet les chiffres suggèrent, à savoir que cette influence est petite, nous avons dessiné une figure hypothétique à gauche de la figure réelle. Dans la figure hypothétique, on voit quelle serait la forme de la courbe du travail pour les nou-

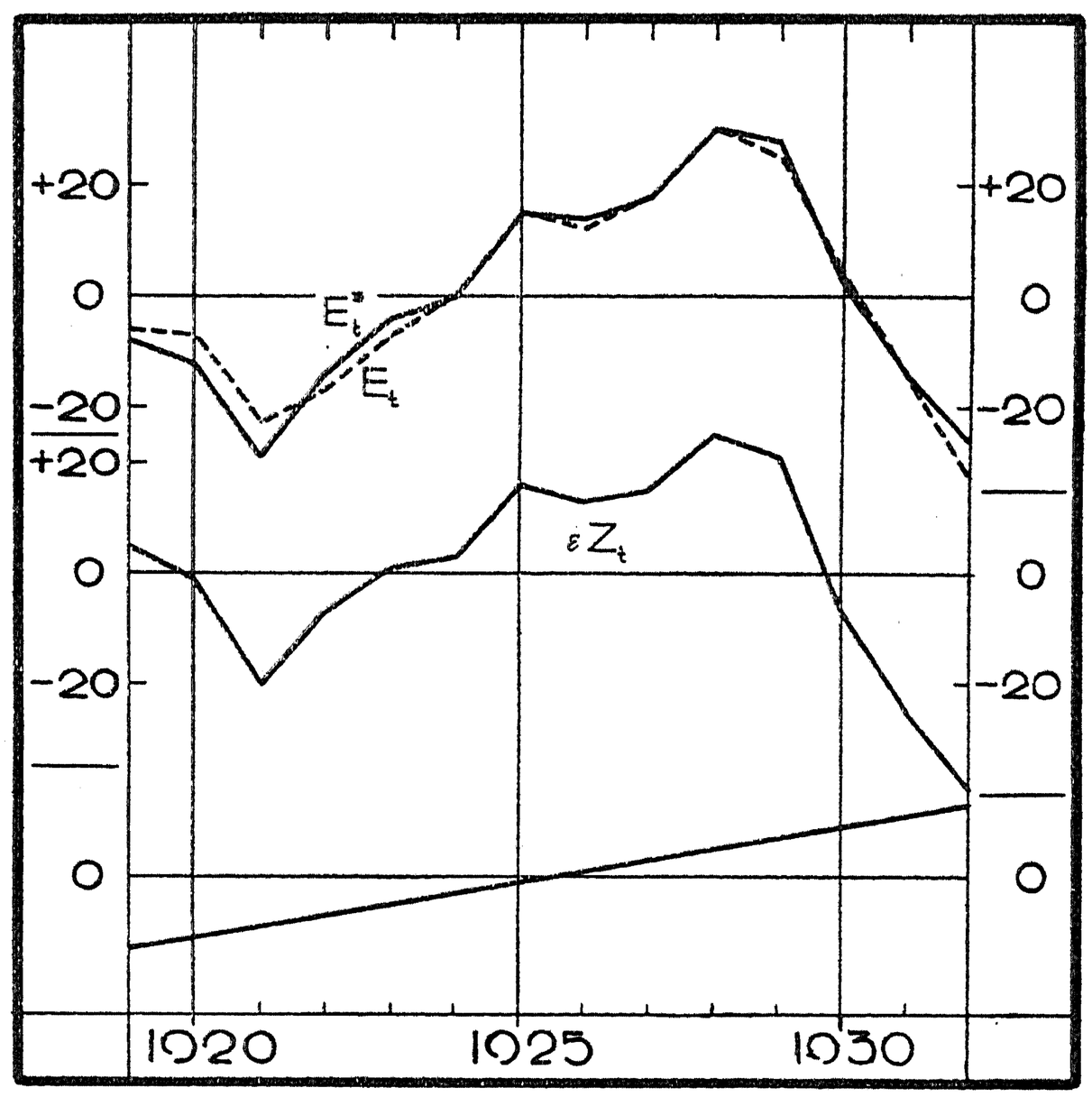


FIG. 12. — « Explication » de la distribution des profits (les revenus non-ouvriers) (voir fig. 8).

veaux investissements, si le taux de l'intérêt avait une action modérée. Dans la figure réelle, on voit que cette forme n'existe pas et que du reste la courbe se rapproche assez bien de la courbe de Z (2). La période de décalage pouvait être déterminée assez exactement à cause des changements caractéristiques que subit la

(1) En principe, il est possible qu'une influence non négligeable existe, alors que les fluctuations du taux de l'intérêt étaient plus grandes qu'aujourd'hui.

(2) Une certaine preuve du caractère symptomatique du taux de l'intérêt pourrait être vue dans le fait qu'en Europe ce taux présente des cycles courts qui sont absents dans les autres variables importantes.

courbe $b_{t+1}$, lorsqu'on lui fait subir une translation d'un mois. Dans ce cas la corrélation baisse nettement (1).

(12) *La distribution des profits* (fig. 12). — Bien que la corrélation soit bonne et assez satisfaisante pour une première approximation, il convient d'observer que certaines catégories de revenus qui ressortent sous E laisseront probablement apercevoir une

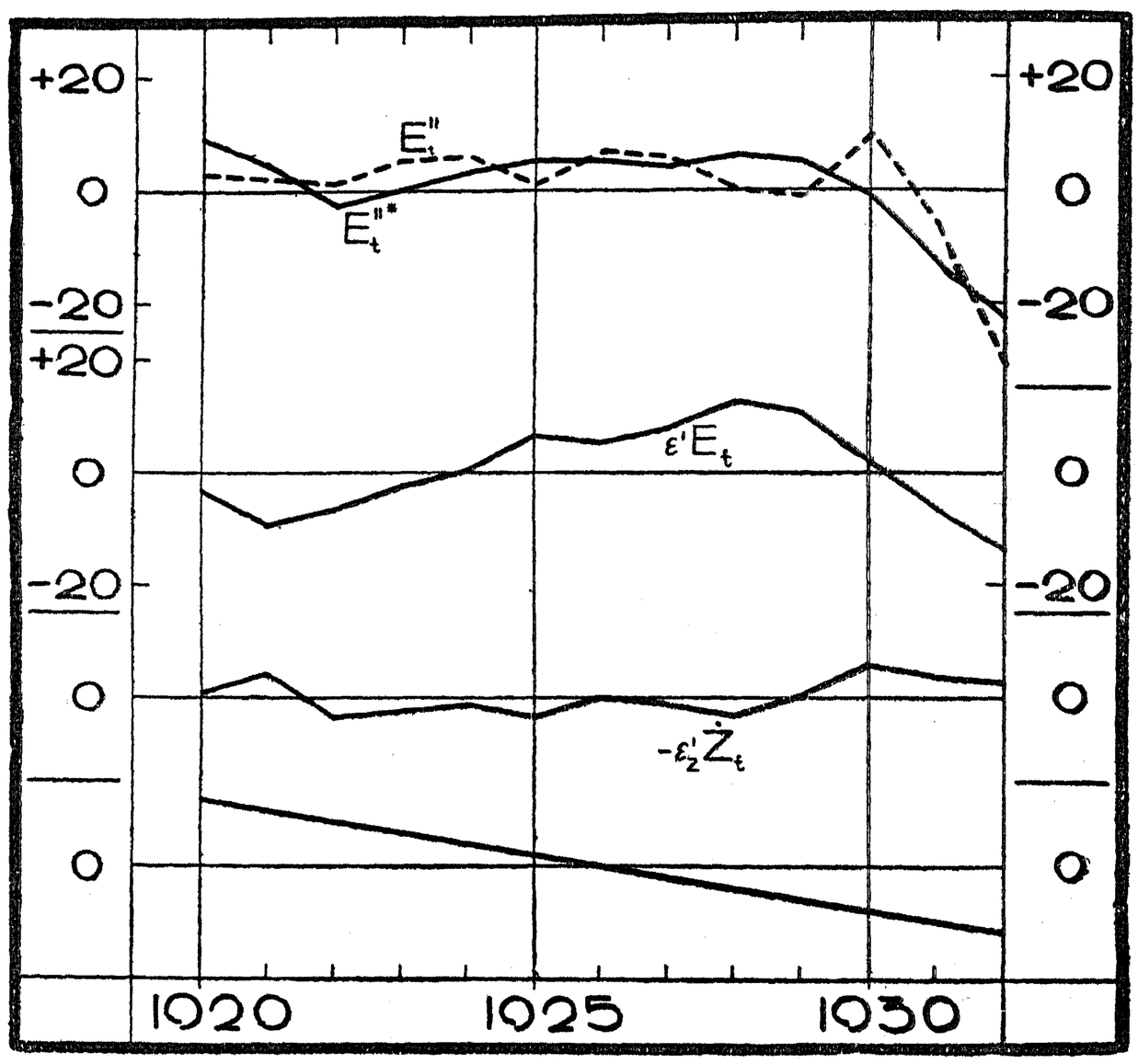


FIG. 13. — « Explication » des mouvements de l'épargne net (voir «g. 8).

dépendance des réserves (2), et décèleront un certain décalage entre Z et E, tandis que d'autres revenus sont liés à la vitesse des variations manifestées par les conditions économiques, ce qui introduit

(1) Une opinion contraire sur le rôle du taux de l'intérêt est énoncée par TINTNER, *Prices in the Business Cycle*, publication de l'Institut Autrichien de Recherches économiques et de l'École Supérieure d'Économie de Londres. Nous avons critiqué cette opinion dans la *Zeitschrift für Nationalökonomie*, VII (1936). Récemment beaucoup d'économistes ont cru que l'accroissement des constructions de logements en Angleterre, au cours de ces dernières années, était la preuve inconstestable de l'influence du taux de l'intérêt sur les investissements. Il est remarquable que les rédacteurs de *The Economist* soutiennent un avis contraire dans leur article du 26 octobre et du 2 novembre 1935 (p. 795 à 844).

(2) Voir par exemple *De Nederlandsche Conjunctuur*, août 1935, p. 20.

une tendance à un décalage en sens inverse. Dans une seconde approximation on pourrait tenir compte de ces suggestions.

(13) *L'épargne* (fig. 13, 14 et 15). — La corrélation entre E″ et E″* est mauvaise. C'est le point faible de notre exemple central. Les connaissances imparfaites des phénomènes en question, aussi bien que le caractère compliqué des relations, peuvent en être la cause. La corrélation n'est cependant pas aussi mauvaise que pour-

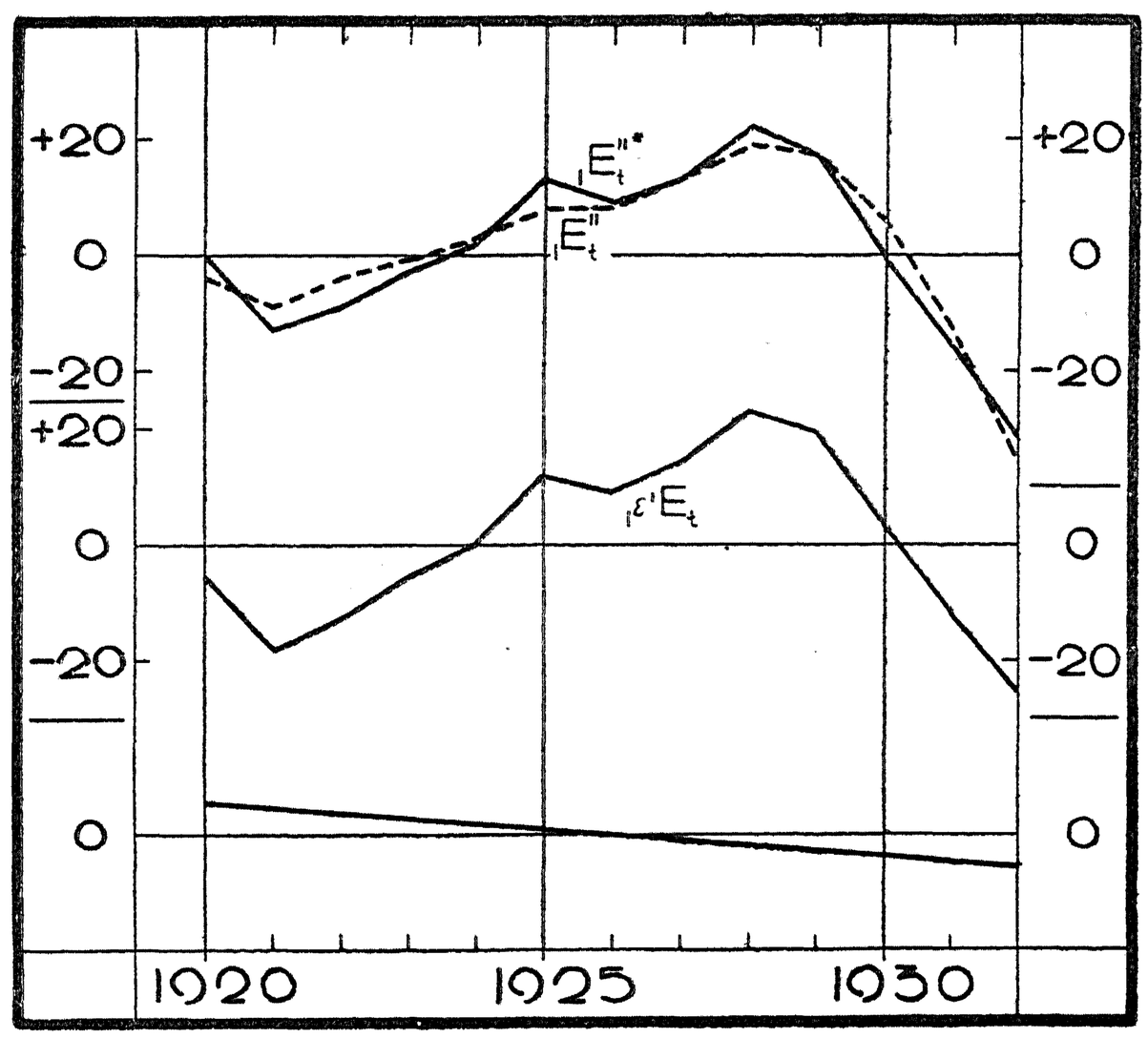


FIG. 14. — « Explication » des mouvements de l'épargne brut (voir fig. 8).

rait le laisser croire la figure 13. Notre grandeur E″ est la différence de deux autres grandeurs, à savoir l'épargne brute et le montant de cet épargne qui « n'est pas dirigée vers les entreprises », mais qui est utilisée à faire des paiements aux assurés, et aux spéculateurs de fonds et de marchandises. Or, les figures 14 et 15 nous montrent que la corrélation obtenue pour ces deux séries composantes de E″ est assez bonne, quand on suppose que E est le seul facteur déterminant de l'épargne brute, tandis que E et $\dot{Z}$ sont les facteurs déterminant du « montant retourné ». La supposition que $\dot{Z}$ possède une influence sur ce montant ressort logiquement du fait qu'il

contient les revenus spéculatifs. La corrélation obtenue pour ces deux séries serait meilleure encore si nous avions supposé une relation curviligne entre $\dot{Z}$ et le montant retourné.

(14) *Le taux de l'intérêt* (fig. 16). — La corrélation obtenue pour cette série est assez bonne, principalement parce que nous avons

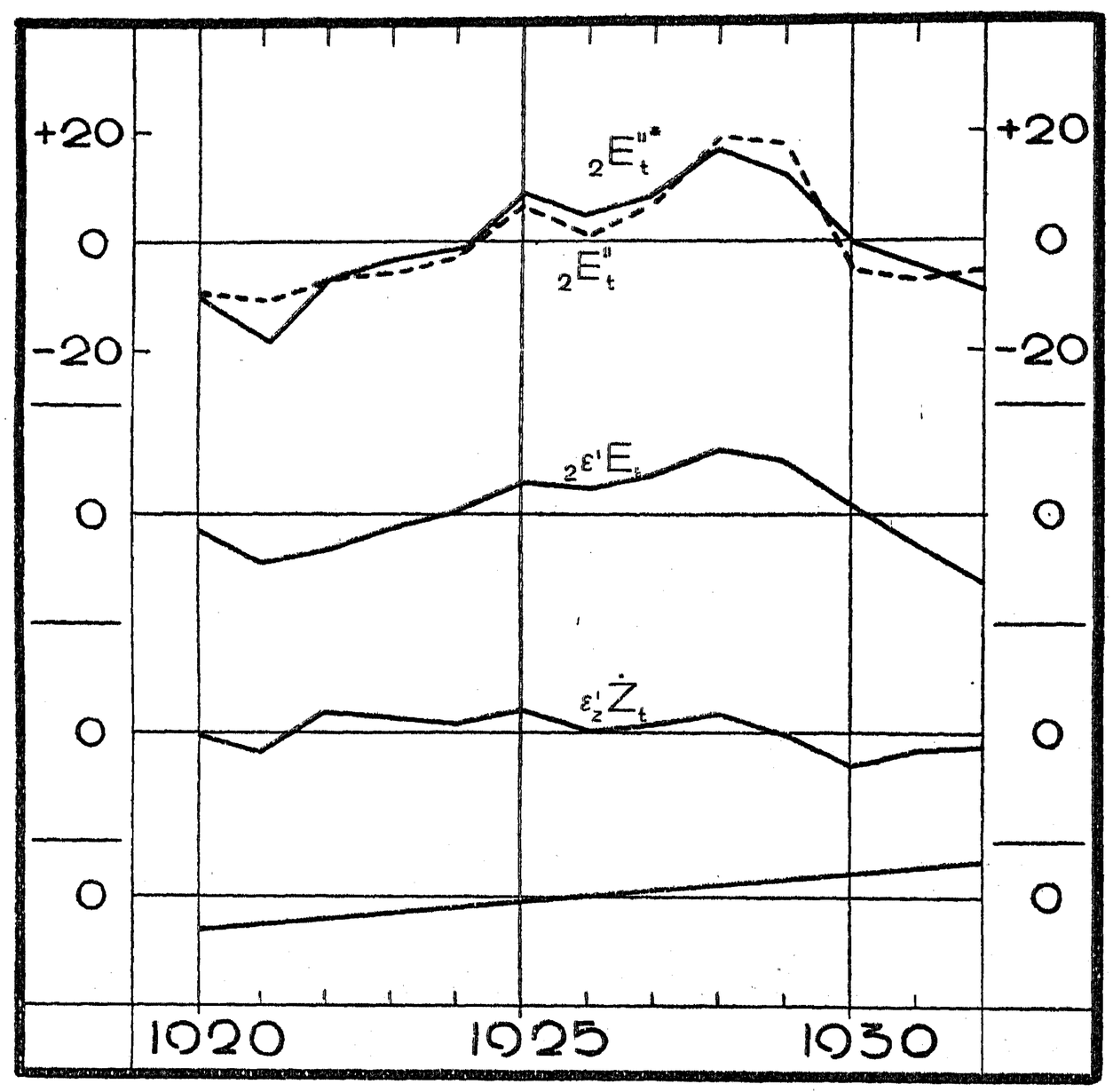


FIG. 15. — « Explication » des mouvements du montant retourné (la partie de l'épargne brut qui n'est pas disponible aux nouveaux investissements) (voir fig. 8).

ajouté, comme facteur déterminant, le stock d'or monétaire. Il convient de considérer ce stock comme une grandeur exogène en raison des événements extra-économiques et semi-économiques qui agissent sur lui. Cependant, puisque le taux de la monnaie a le caractère d'une variable symptomatique dans notre exemple central, nous aboutissons à la conclusion remarquable que, *bien que le stock d'or influence sans doute le taux de l'intérêt et, par conséquent, la politique des banques centrales, son influence sur les mouvements de la production demeure discutable.* C'est seulement une influence

indirecte qui, à notre avis, joue ici un rôle. En effet, si le stock d'or n'avait pas été aussi important qu'il l'a été en réalité, l'expansion aurait peut-être atteint bien avant 1929 un plafond déterminé par le facteur monétaire.

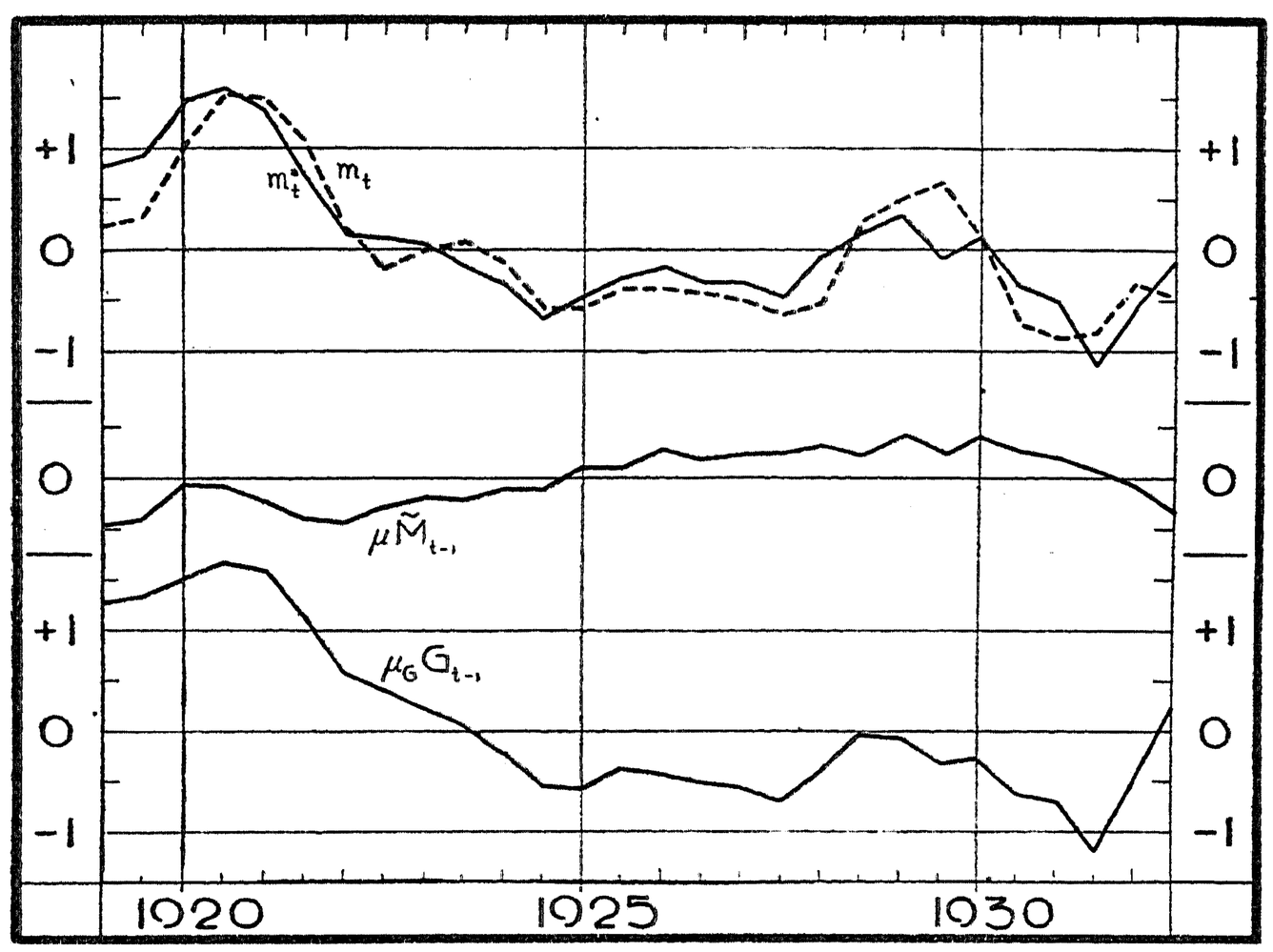


FIG. 16. — « Explication » des fluctuations du taux de l'intérêt (voir fig. 8).

## C. — GÉNÉRALISATIONS DE L'EXEMPLE CENTRAL

### 17. L'EXTENSION DU NOMBRE DE VARIABLES.

Nous examinerons maintenant quelques généralisations de l'exemple central ; elles nous montreront que la méthode appliquée peut être utilisée pour bien d'autres approximations de la réalité.

Tout d'abord remarquons que certaines formules peuvent servir à des schémas très divers. Il en résulte que toutes les conclusions tirées à propos du type de mouvements et de politique à suivre demeurent valables : toutefois l'interprétation d'un ou plusieurs des coefficients peut être modifiée. Nous avons déjà remarqué, à cet égard, que, sous certaines conditions, le rejet du commerce extérieur ne modifie pas nos équations.

On peut cependant généraliser le schéma par d'autres moyens. Nous en considérons quelques-uns. Tout d'abord le nombre de variables peut être accru. Quelques exemples importants d'une telle extension vont être donnés. Le premier consiste à inclure, dans le schéma et d'une manière plus précise, des *relations internationales*. Nous avons remarqué que, dans l'exemple des États-Unis, cela ne semblait pas être nécessaire. Par contre, cette nécessité subsiste pour beaucoup d'autres pays ; traçons un système qui paraît plus exact pour ces pays. Pour ce faire, il faudra transformer l'exemple central de la manière suivante (1).

Indiquons par $\widehat{U}'_{At}$ *l'excédent des exportations sur les importations* (comme on s'en souvient, il n'y a qu'une seule espèce de biens) ; il faudra tout d'abord ajouter un terme à l'équation (6), qui devient

$$(6') \qquad U'_t = L_t + E'_t + \widehat{U}'_{At}$$

Deuxièmement, il faut ajouter une équation déterminant $\widehat{U}'_{At}$. Étant donné le niveau des prix à l'étranger considéré constant (il y a lieu, dans ce qui suit, d'abandonner cette hypothèse) on pourra supposer que $\widehat{U}'_{At}$ dépend du niveau des prix $p_t$ et du *change*, que nous indiquerons par $w_t$ (2), par exemple

$$\widehat{U}'_{At} = -\eta_p p_{t-[16]} + \eta_w w_{t-[16]},$$

où le symbole [16] exprime, comme ci-dessus, une période de décalage.

Troisièmement, nous introduisons la notion de *crédits fournis par l'étranger* $M_{At}$. Leur montant dépendra — dans l'hypothèse d'un niveau donné du taux de l'intérêt à l'étranger — du taux de l'intérêt national et du cours du change, soit

$$(17) \qquad M_{At} = \mu m_{t-[17]} + \mu' w_{t-[17]}.$$

En même temps l'équation (15) se transforme en

$$(15') \qquad M_{At} + M_t + E_t - E'_t + U'_t = L_t + E_t.$$

On aura à ajouter une équation déterminant le cours du change, c'est-à-dire la *balance des paiements*.

---

(1) Voir aussi notre étude intitulée *An Econometric Approach Business Cycle Problems*, Hermann, Paris, 1937.

(2) Il va sans dire que par analogie avec ce qui précède $w_t$ représente la déviation entre le cours du change et sa valeur d'équilibre.

$$M_{At} + \widehat{U}'_{At} + W = 0, \tag{19}$$

où W indique l'afflux d'or. Cette équation peut signifier deux choses, ou bien on peut considérer l'afflux d'or comme donné (comme une perturbation, si l'on veut) et le cours du change déterminé par (19) ; ou bien on peut supposer que le cours du change est une grandeur constante et donnée, déterminant l'influx d'or (positive ou négative) nécessaire au maintien des cours. Dans ce cas, on aura $w_t = 0$, ce qui a pour effet de simplifier les équations (16) et (17), tandis que l'équation (19) devient superflue dans le système : elle ne définit que la grandeur symptomatique W.

Un deuxième exemple d'extension du nombre des variables est fourni par l'introduction de la *productivité du travail* comme grandeur variable. Cela ne modifie que l'équation (6), qui devient

$$c_t = 0.9(u_{t-[7]} + g_t), \tag{6'}$$

où $g_t$ représente la déviation de la productivité du travail par rapport à sa valeur d'équilibre. Tout comme l'équation (6), la nouvelle équation n'est qu'une approximation, valable pour les petites valeurs de $p$, $l$ et $q$.

De plus, une équation doit être ajoutée, déterminant la grandeur $g_t$. Comme nous l'avons exposé ailleurs (1), une approximation suffisante peut être obtenue par la relation

$$g_t = -\gamma \tilde{u}_{t-[18]}, \tag{18}$$

dans laquelle, pour un nombre de branches industrielles, la période [18] a la longueur d'environ une demi-année (2).

Il est encore d'autres possibilités. On peut, par exemple, considérer séparément la production et la vente de matières premières et de produits finis (*division verticale*). C'est ainsi que nous avons procédé dans notre étude concernant la proposition de Goudriaan (3); utilisant d'ailleurs un schéma plus simple. L'avantage d'une telle division verticale du marché réside dans la possibilité de tenir

(1) Voir par exemple *Econometrica*, 1935, III, p. 248.

(2) On observera que le système d'équations présenté jusqu'ici ressemble beaucoup au système donné dans la *Weltwirtschaftliches Archiv*, 42, 1935, p. 366. Il y a cependant quelques différences apparues au cours de recherches faites ultérieurement.

(3) Pour cette proposition voir par exemple GOUDRIAAN, How to Stop Deflation, *The Search Publ.*, 1932. Pour l'étude en question, voir notre article : Ueber den Wert mathematischer Konjuukturtheorien, dans *Beiträge zur Konjunkturlehre*, Berlin, 1936.

compte du rôle des stocks des matières premières dans le cycle [1].

Une quatrième extension du nombre des variables est le résultat d'une *division horizontale* du marché. Cette division peut être fondée sur la distinction entre les biens durables et les biens non-durables, (je prie le lecteur de se reporter pour cette discussion au paragraphe suivant) ou bien sur la distinction entre des biens concurrents en général. Dans ces deux cas, il faudra introduire des coefficients d'élasticité d'une manière plus apparente que nous ne l'avons fait jusqu'ici. Dans l'exemple central, ce sont les coefficients $\varepsilon'$ et $\varepsilon'_Z$ seuls qui commandent la distribution du revenu entre l'épargne et les dépenses. Aussitôt que l'on introduit plusieurs biens, ce problème se retrouve d'une manière plus explicite. En indiquant deux biens par les indices B et C, on aura les changements suivants dans nos équations :

$$(1'') \quad L_t = l_t + a_t$$

$$(2'') \quad E_t = E'_t + E''_t$$

$$(3'') \quad U'_{Bt} = \bar{u}_B p_{Bt} + 2u'_{Bt}, \; U'_{Ct} = \bar{u}_C p_{Ct} + 2u'_{Ct}$$

$$(4'') \quad Z_t = 2u'_{Bt} + 2u'_{Ct} + \bar{u}_B p_{Bt} + \bar{u}_C p_{Ct} - l_t - c_t + (\zeta_B - 1) b_{t-[4]} + \zeta \dot{Z}_t$$

$$(5'') \quad U'_{Bt} + U'_{Ct} = L_t + E'_{t-[5]} + \widehat{U}'_{At}$$

$$(6'') \quad c_t = \gamma_B u_{Bt} + \gamma_C u_{Ct}$$

$$(7'') \quad a_t = b_t + c_t$$

$$(8'') \quad u_{Bt} = u'_{Bt}, \; u_{Ct} = u'_{Ct}$$

$$(9'') \quad p_{Bt} = \pi_B u_{Bt-[9]}, \; p_{Ct} = \pi_C u_{Ct-[9']}$$

$$(10'') \quad l = \lambda_a a_t + \lambda_p \left[\bar{u}_B p_{Bt-[10]} + \bar{u}_C p_{Ct-[10]}\right]$$

$$(11'') \quad b_t = \alpha Z_{t-[11]} - \beta m_{t-[11]}$$

$$(12'') \quad E_t = \varepsilon Z_t$$

$$(13'') \quad E''_t = \varepsilon' E_t + \varepsilon'_z \dot{Z}_t$$

$$(14'') \quad m_t = \mu_M \widetilde{M}_{t-[14]}$$

$$(15'') \quad M_{At} + M_t + U'_{Bt} + U'_{Ct} = L_t + E'_t$$

$$(16'') \quad \widehat{U}'_{At} = -\eta_B p_{Bt} - \eta_C p_{Ct}$$

$$(17'') \quad M_{At} = \mu m_t$$

(1) L'étude des stocks depuis 1890 (*De Ned. Conjunctuur*, mars 1933, p. 17) nous a donné l'impression que ce rôle a été assez modeste. Telle est la raison qui nous a amené à négliger ce problème dans notre exemple central.

Il faut ajouter une nouvelle équation justement du type annoncé, c'est-à-dire une équation indiquant la répartition des dépenses entre les deux biens. On peut ainsi supposer que l'on a

$$\frac{\bar{u}_C + u'_C}{\bar{u}_B + u'_B} = \theta_0 - \theta_1 \frac{\bar{p}_C + p_C}{\bar{p}_B + p_B},$$

ce qui donnerait, en négligeant les termes quadratiques, une équation de la forme

$$u'_C + \theta' p_C + \theta'' u'_B + \theta''' p_B = 0.$$

La division horizontale du marché est également concevable en adoptant la distinction entre la demande ou l'offre de différentes personnes ou firmes. Un exemple important dans les discussions sur les cycles se trouve constituée par la distinction entre les banques privées, la banque centrale et les autres entreprises en ce qui concerne leur offre de crédit à court terme. Pour certains problèmes, il est très utile de procéder à cette discrimination. Dans ce cas il faut introduire des coefficients bien connus dans la théorie du polypole ; on arrive à des équations plus ou moins analogues à celles que nous venons de discuter.

Il y a une troisième division horizontale qui sous certaines conditions peut prendre de l'importance : celle résultant de la distinction entre les industries « âgées » et « nouvelles ». Les dernières sont spécialement tributaires des nouveaux investissements.

Enfin le nombre de variables peut être étendu par l'adjonction des stocks à côté des « flux » (production, ventes, consommations, etc...). Ces stocks ont un intérêt spécial pour les matières premières ainsi que pour les biens de longue durée. Ils ne sont pas explicites dans notre exemple central. Cela ne signifie pas, cependant, qu'il n'y a pas de stocks dans ce schéma. Nous l'avons déjà remarqué, les stocks ont le caractère de variables symptomatiques, c'est-à-dire qu'ils sont influencés par les autres variables, sans que celles-ci le soient par les stocks. Le fait que, pour les biens de consommation, les ventes $\bar{u}' + u'_t$ sont égales à $\bar{u} + u_t$ c'est-à-dire aux quantités dont la production a commencé, entraîne qu'elles ne sont pas égales aux quantités que la production vient d'achever, à savoir à $\bar{u} + u_{t-[8']}$ (1). Il y a donc des stocks

(1) La période [8'] sera par exemple deux fois [8].

modifiables de biens de consommation. Par analogie il y a des stocks variables de biens d'investissement ; ces stocks dépendent de la durée de ces biens et de la distribution de ces durées. Dans l'exemple, aucune hypothèse n'a été explicitement faite au regard de ces durées ; mais l'hypothèse implicite nécessaire est que ces durées sont telles qu'à chaque instant un stock suffisant pour la production $\bar{u} + u'_t$ est présent.

C'est seulement dans cette hypothèse d'une certaine abondance des stocks qu'il est admissible de considérer ceux-ci comme des variables symptomatiques. Aussitôt que les stocks tendent à se réduire à zéro, leur influence devient probable tant sur les prix des biens de consommation que sur le volume maximum de la production de ces biens. On peut généraliser le système d'équations en ajoutant pour toute catégorie de biens :

*a*) une équation définissant la notion de stock, par exemple

$$\tilde{\tilde{u}}''_t = \tilde{\tilde{u}}_{t-[8']} - \tilde{\tilde{u}}'_t,$$

où $\tilde{\tilde{u}}''_t$ représente le stock, et en remplaçant une des équations déjà présentée ;

*b*) une équation indiquant l'influence du stock sur d'autres variables, par exemple

$$p_t = \pi_u u_{t-[9]} - \pi''_u \tilde{\tilde{u}}''_{t-[9']}.$$

Il y a encore d'autres considérations qui peuvent nous retenir. Du moment qu'on renonce à l'hypothèse de stocks abondants, il faut tenir compte du fait que les stocks ne deviennent jamais négatifs. Certaines « tensions » apparaissent dans le système des relations dès que les stocks s'approchent de zéro. Ces tensions amènent les changements nécessaires à empêcher la disparition des stocks. Un exemple s'en retrouve dans l'équation (3) pour $u'_t$. La valeur résultant de cette équation doit être amendée quand $\bar{u}' + u'_t$ surpasse le stock disponible. En réalité cela se fait par un simple rationnement dans certains cas ou par une hausse des prix, telle que la quantité demandée ne surpasse guère le stock disponible. Il s'ensuit que l'équation du prix ne sera plus remplie dans ce cas ; il est même possible que l'équation

$$p_t = \pi_u u'_{t-3} - \pi''_u \tilde{\tilde{u}}''_{t-1},$$

introduite plus haut, ne sera pas exacte non plus ; on aura, par exemple,

$$p_t = \pi_u u'_{t-3} + \frac{\pi_u}{\tilde{u}''_{t-1} + u''_0}.$$

Du point de vue mathématique, une telle relation rend beaucoup plus compliquée la solution du système d'équations, en raison de l'absence de linéarité. Comme nous l'avons démontré aux paragraphes 7 et 9, cette circonstance introduit de nouveaux types de mouvements.

Cependant, dans de tels cas, on peut choisir une autre approximation mathématique de ces relations. On peut énoncer que la formule déterminant $u'_t$, c'est-à-dire la formule (3), ne vaut que pour des stocks suffisants. Dès qu'il n'en est plus ainsi, cette dernière formule est remplacée par

$$u'_t = \tilde{u}''_{t-1}.$$

Voici la conséquence que l'on en peut tirer : le système économique commence par décrire le mouvement donné par le système primitif d'équations ; aussitôt que les stocks sont épuisés, le système donne naissance à une autre courbe.

## 18. Introduction d'autres relations ; variables « adiabatiques ».

Une deuxième manière de généraliser le système d'équations consiste à introduire d'autres relations entre les variables considérées. Une forme spéciale de changement des relations est donnée par la considération des « *retards distribués* » (*distributed lags*), expression due à M. Irving Fisher (1). Cela veut dire, par exemple, que les investissements ne sont pas seulement liés aux profits d'il y a quatre mois, mais aussi à ceux d'il y a six mois, d'il y a cinq mois, etc.... On aura alors

$$\bar{b}l_t + \bar{l}b_t = \alpha_6 Z_{t-6} + \alpha_5 Z_{t-5} + \ldots + \alpha_0 Z_t - \beta m_{t-4},$$

où, d'ailleurs, le dernier terme pourrait constituer lui-même une série analogue de termes. Les coefficients $\alpha_i$ se répartiront peut-être

(1) Voir par exemple, *Theory of Interest*, 1930.

suivant une distribution à peu près normale. Il est clair que l'introduction de ces retards distribués augmentera le nombre de termes de l'équation finale, en faisant apparaître un retard différent. Cette circonstance a pour effet de niveler plus ou moins les termes consécutifs dans l'équation finale.

Nous évoquerons également une méthode générale propre à déceler l'influence d'un tel nivellement des coefficients sur la valeur des racines de l'équation caractéristique. Il est évident, cependant, que la nouvelle équation aura, en général, moins de racines réelles et positives. Le nivellement des coefficients de l'équation finale a pour résultat de réduire le nombre des changements de signe de ces coefficients et puisque des racines positives ne sont compatibles qu'avec un tel changement de signe, ces racines tendent à s'évanouir.

En réalité la plupart des *retards* seront des *retards distribués*. On est ainsi amené à songer à l'existence d'un trop grand nombre de racines positives dans les exemples schématisés, où l'on n'a pas introduit assez de retards distribués. Il est probable que ces racines sont sans signification réelle, surtout quand elles possèdent un module assez élevé.

Ces considérations nous conduisent à une autre généralisation du système d'équations, *propre à manier davantage la subdivision du temps*. Elle nous fournit le moyen de parvenir à une meilleure approximation de la valeur réelle des décalages. La conséquence en est que le degré de l'équation caractéristique devient plus élevé. Quand, par exemple, notre système est caractérisé, entre autres, par deux périodes de décalage, l'une de 1,2 mois et l'autre de 1,4 mois, on obtiendra une équation du 7e degré au moins, tandis qu'une approximation n'utilisant que des périodes élémentaires d'un mois, fournira peut-être une équation du second degré tout au plus.

Quand, cependant, on pousse la subdivision du temps, en introduisant des unités de 0,1 mois par exemple, au lieu d'un mois, toutes choses égales d'ailleurs, on aboutit exactement aux mêmes solutions. On obtient dans ce cas comme équation caractéristique

$$y^{20} + ay^{10} + b = 0,$$

au lieu de

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Cela équivaut à une transformation de $x$ en $y^{10}$. L'unité de temps étant dix fois plus petite, les solutions fournissent maintenant des périodes dix fois plus grandes (1).

Une autre question se pose lorsqu'on se demande *quelle est l'influence de l'introduction de petits termes d'une période de décalage plus grande que celles inclues jusqu'ici.* Cela signifie que dans l'équation finale un terme s'ajoute, correspondant à une période plus éloignée de celle du dernier terme. Au lieu de l'équation

$$u_1 + a_1 u_{t-1} + a_2 u_{t-2} + \ldots + a_n u_{t-n} = 0,$$

on aura

$$u_t + a_1 u_{t-1} + \ldots + a_n'' u_{t-n} + a_{n+m}\, u_{t-m-n} = 0.$$

Ses équations caractéristiques sont

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

et

$$f'(x) = x^{m+n} + a_1 x^{m+n-1} + a_2 x^{m+n-2} + \ldots + a_n x^m + a_{n+m} = 0$$

Supposant que $a_{n+m}$ est petit en comparaison de $a_1, \ldots, a_n$, on pourra écrire

$$f'(x) \sim x^m f(x),$$

d'où l'on voit que $f'(x)$ aura $m$ racines de plus que $f(x)$ et que ces racines seront voisines de zéro. Il s'en suit que l'omission du terme $a_{n+m} u_{t-m-n}$, dans l'équation finale, n'altèrera pas grandement les mouvements du système. Il est donc permis de négliger de tels termes, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises.

D'autre part, il est des simplifications de nature économique dans notre système d'équations. C'est elles qui vont nous retenir maintenant. L'introduction d'autres relations alors se présente sous un aspect tout à fait différent. Il se peut que nous soyons obligés de modifier radicalement l'une des équations de notre exemple central, correspondant mal aux conditions réelles. Par exemple, nous avons supposé que la grandeur de la production de

(1) D'ailleurs l'équation en $y$ possède 18 autres racines qui cependant correspondront, dans la plupart des cas, à des périodes très courtes sans intérêt pour nos problèmes.

biens de consommation est basée principalement sur les ventes. On pourrait croire au contraire que le volume de la production est basé sur d'autres indices, tel que la marge du profit. Alors l'équation (8) du système original se modifie en

$$u_t = \alpha'' z_{t-1}, \quad z_t = p_t - l_t.$$

Il va sans dire qu'une équation plus générale à deux termes peut être adoptée

$$u_t = \alpha'' z_{t-1} + \alpha''' u'_t.$$

Elle exprime que les entreprises ou industries déterminent leur production soit d'après la marge, soit d'après les ventes, soit d'après ces deux facteurs à la fois. L'expérience décide laquelle de ces hypothèses est la bonne. Il est assez difficile de procéder à un contrôle statistique. Sans doute constitue-t-il un des points du programme des recherches statistiques à venir.

A cet exemple, on pourrait en joindre bien d'autres. Nous renvoyons aux discussions qui ont été développées à propos de la formation des salaires (1).

Un troisième type de généralisation est fourni par l'abandon de l'hypothèse de la stricte constance des valeurs d'équilibre (voir le paragraphe 3). Nos formules du mouvement restent valables avec assez d'exactitude au cas où ces valeurs présentent des variations lentes, c'est-à-dire des variations qui sont minimes comparées aux fluctuations des variables. C'est là également une généralisation importante, puisque la réalité ne correspond guère à des valeurs d'équilibre absolument constantes. Nos formules gardent leur valeur, même dans le cas où, étant donné la linéarité des équations, on substitue aux valeurs d'équilibre les valeurs correspondantes à une solution spéciale du système. Cette remarque est particulièrement importante lorsqu'on choisit une solution donnant un mouvement lent, soit un mouvement de période très longue et d'amplitude restreinte, soit un mouvement monotone et lent. Ce mouvement peut alors être considéré, ainsi que nous l'avons déjà observé, comme une généralisation de la notion d'état d'équilibre, appelons-le *mouvement d'équilibre*. Il a la propriété de ne pas montrer de recul sérieux.

---

(1) Voir par exemple notre article intitulé « Annual Survey : Suggestions on Quantitative Business Cycle Theory », *Econometrica*, III, 1935, p. 241.

## D. — AUTRES MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'APPROXIMATION

### 19. Méthode de l'équation différentielle et méthode de la réduction du nombre des termes.

A côté de la méthode employée plus haut pour interpréter le mouvement du système, il y en a d'autres.

Nous traiterons ici de quelques-unes d'entre elles. La première peut être appelée *méthode de l'équation différentielle.* Elle consiste en ceci : on rapporte au même instant tous les termes de l'équation à l'aide de la formule

$$f(t-\theta) = f(t) - \theta f'(t) + \frac{\theta^2}{2!} f''(t) + \dots \tag{19.1}$$

Suivant qu'on arrête le développement à un nombre restreint ou à un nombre plus élevé de termes, on obtient une équation différentielle d'ordre plus ou moins élevé, et une approximation plus grossière ou plus serrée. Cette approximation sera acceptable dans l'étude des mouvements à long terme, plutôt que dans celle des cycles courts, puisqu'on atteindra rapidement dans le dernier cas, la limite de validité de l'approximation. On pourrait faire usage de cette méthode dans l'étude des mouvements d'équilibre.

La deuxième méthode d'approximation à discuter pourra s'appeler la *méthode de la réduction du nombre de termes.* Elle conserve le caractère primitif de l'équation, c'est-à-dire celui d'une équation aux différences finies, mais elle réduit le nombre des termes par la transformation

$$f(t+\theta) = \frac{1}{2}\Big[f(t) + f(t+2\theta)\Big], \tag{19.2}$$

ou bien par la transformation

$$f(t+k\theta) = \frac{1}{n}\Big[(n-k)f(t) + kf(t+n\theta)\Big]. \tag{19.3}$$

Par l'application de la formule (19.2), on peut par exemple éliminer tous les termes d'ordre impair et réduire le nombre de termes à la

moitié ; par la formule (19.3), on réduit ce nombre à $\frac{1}{n}$ du nombre initial. Il va sans dire que cette méthode comporte également certaines limites d'application ; elle aussi ne s'emploie que pour les mouvements lents. Il est probable cependant qu'elle s'applique à un intervalle plus étendu que la première méthode. L'avantage consiste en ce qu'on obtient comme équation caractéristique une équation de degré inférieur à celui de l'équation caractéristique primitive. D'autre part, on simplifie un peu trop le système des mouvements possibles parce qu'on « obscurcit » quelques racines de l'équation finale. A ces racines ne correspondent cependant que des mouvements à période très courte.

Il est évident qu'en général les limites d'application de cette méthode se restreignent quand on réduit de deux seulement le nombre de termes de l'équation finale. Dans ce cas, l'équation caractéristique est linéaire et le système ainsi simplifié ne peut décrire que deux sortes de mouvements : *a*) des mouvements exponentiels, et, *b*) des mouvements cycliques d'une période de deux unités seulement. La possibilité des mouvements cycliques à période plus longue est exclue *a priori*, ce qui comporte une simplification beaucoup trop grande du système.

## 20. Méthode de l'équation intégrale ; équations mixtes.

La troisième méthode d'approximation est appelée « *méthode de l'équation intégrale* ». Ici on suppose que le nombre de termes dans l'équation finale devient infini. C'est spécialement dans le cas des « retards distribués » (voir paragraphe 18) que cette supposition semble légitime. On peut alors écrire

$$(20.1)\qquad \int_{t-T}^{t} f(t-\tau)e^{z\tau}d\tau = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{T} f(\tau')e^{z(t-\tau')}d\tau' = 0$$

où on met $f(\tau')$ pour le coefficient du terme correspondant au moment $\tau'$, et T pour le retard maximum jouant quelque rôle.

Nous montrerons avec plus de détails, les avantages de cette méthode. Choisissons d'abord l'unité de temps telle que $T = 2\pi$ et développons la fonction $f(\tau')e^{\alpha\tau'}$ en série de Fourier

$$(20.2)\qquad f(\tau')e^{\alpha\tau'} = A_0 + \sum_1^k A_k \cos k\tau' + \sum_1^k B_k \sin k\tau'.$$

Il suit que

$$f(\tau') = e^{-\alpha\tau'}\left(A_0 + \sum^k A_k \cos k\tau' + \sum^k B_k \sin k\tau'\right).$$

Nous transformons

$$(20.3) \qquad A_k \cos k\tau' + B_k \sin k\tau' = \frac{1}{2}A_k\left(e^{ik\tau'} + e^{-ik\tau'}\right) + \frac{1}{2i}B_k\left(e^{ik\tau'} - e^{-ik\tau'}\right) = C_k e^{ik\tau'} + D_k e^{-ik\tau'},$$

où

$$C_k = \frac{1}{2}\left(A_k - iB_k\right), \qquad D_k = \frac{1}{2}\left(A_k + iB_k\right).$$

L'équation (20.1) prend la forme

$$\int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau'}\left(A_0 + \sum_1^k C_k e^{ik\tau'} + \sum_1^k D_k e^{-ik\tau'}\right) e^{z(t-\tau')} d\tau' = 0.$$

Après division par $e^{zt}$, on obtient

$$A_0 \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau' - z\tau'} d\tau' + \sum_1^k C_k \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau' + ik\tau' - z\tau'} d\tau' + \sum_1^k D_k \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau' - ik\tau' - z\tau'} d\tau' = 0.$$

Effectuant l'intégration, on a

$$\frac{A_0}{\alpha + z}\left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right] + \sum_1 k \frac{C_k}{\alpha + z - i}\left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right] + \sum k \frac{D_k}{\alpha + z - i}\left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right] = 0.$$

$$(20.4) \qquad \left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right]\left(\frac{A_0}{\alpha + z} + \sum_1 k \frac{C_k}{\alpha + z - i} + \sum_1 k \frac{D_k}{\alpha + z + i}\right) = 0.$$

On le voit, il y a deux groupes de racines :

1° celles de l'équation

$$e^{-2\pi(\alpha+z)} = 1$$

c'est-à-dire $\alpha + z = 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ etc.

2° celles de l'équation

$$(20.5)\qquad \frac{A_0}{\alpha + z} + \sum_1^k \frac{C_k}{\alpha + z - i} + \sum_1^k \frac{D_k}{\alpha + z + i} = 0$$

La première famille de racines donne les solutions

$$e^{-\alpha t},\ e^{-\alpha + it},\ e^{-\alpha + 2it},\ e^{-\alpha + 3it},\ \text{etc.}$$

c'est-à-dire des mouvements présentant tous le même degré d'amortissement et dont le premier terme est monotone, tandis que les autres possèdent des périodes de $2\pi$, de $\pi$, de $\frac{2\pi}{3}$, de $\frac{\pi}{4}$ etc. Ce sont des périodes courtes. Dans l'exemple central T étant de 8 mois, ces périodes ne sont guère intéressantes. Or, ce cas se présente, quand $C_k = D_k = 0$, les coefficients sont alors tous positifs et s'évanouissent comme une série convergente géométrique. Figurons-nous maintenant que nous approchions la forme réelle de $f(\tau)$ par l'addition successive de coefficients C et D et commençons par ajouter seuls $C_1$ et $D_1$. Il y aura maintenant une deuxième famille de racines, satisfaisant à l'équation

$$\frac{A_0}{\alpha + z} + \frac{C_1}{\alpha + z - i} + \frac{D_1}{\alpha + z + i} = 0.$$

En écrivant $c_1$ pour $\frac{C_1}{A_0}$ et $d_1$ pour $\frac{D_1}{A_0}$, nous aurons

$$(\alpha + z)^2 + 1 + (\alpha + z)\left[c_1(\alpha + z + i) + d_1(\alpha + z - i)\right] = 0.$$

Il est utile de remplacer $c_1$ et $d_1$ par $a_1$ et $b_1$, où $a_1 = \frac{A_1}{A_0}$ et $b_1 = \frac{B_1}{A_0}$; on obtient

$$(\alpha + z)^2 + 1 + \frac{1}{2}(\alpha + z)\Big[(a_1 - b_1 i)(\alpha + z + i) + (a_1 + b_1 i)(\alpha + z - i)\Big] = 0$$

$$(\alpha + z)^2 + 1 + (\alpha + z)\left[a_1(\alpha + z) + b_1\right] = 0$$

$$(1 + a_1)(\alpha + z)^2 + b_1(\alpha + z) + 1 = 0$$

$$\alpha + z = -\frac{b_1}{2(1 + a_1)} \pm \frac{1}{2(1 + a_1)}\sqrt{b_1^2 - 4(1 + a_1)}$$

$$z = -\frac{b_1}{2(1 + a_1)} \pm \frac{i}{2(1 + a_1)}\sqrt{4(1 + a_1) - b_1^2}$$

On en déduit les propositions suivantes :

1° Ces solutions donnent lieu à des mouvements monotones, si $b_1^2 > 4(1 + a_1)$ ;

2° Elles indiquent des mouvements à longues périodes si

$$b_1^2 < 4(1 + a) \quad \text{et} \quad 4(1 + a_1) - b_1^2 \ll 4(1 + a_1)^2 ;$$

3° Les périodes deviennent courtes, si $4(1 + a_1) - b_1^2$ est voisin de ou dépasse $4(1 + a_1)^2$ ;

4° Le degré d'amortissement augmente avec $\dfrac{b_1}{2(1 + a_1)}$.

L'importance de cette méthode nous semble résider en ce qu'elle permet d'analyser l'influence de l'introduction des décalages distribués comme ils ont été considérés plus haut (Paragraphe 18). En effet, l'introduction des « décalages distribués » signifie qu'on effectue un certain nivellement des coefficients successifs de l'équation finale, c'est-à-dire qu'on rend plus monotone la fonction $f(\tau')$. Cela veut donc dire qu'on réduit l'amplitude des termes à haute fréquence dans la série de Fourier. Conséquemment, on obtient une équation (20.5) ayant moins de termes $C_k$ et $D_k$.

La structure de notre exemple central est trop simple pour une application de ces idées. Il sera utile d'attendre, pour une application, jusqu'à ce qu'on ait analysé avec plus de précision les phénomènes économiques.

*Équations mixtes.* — Il va sans dire qu'il est également possible de décrire les systèmes économiques avec des équations mixtes (équations intégro-différentielles, équations différentielles et à différences, etc.). Dans certaines circonstances, c'est la méthode la plus simple. Il paraît difficile d'affirmer cependant, que la nature des problèmes conduit à ce type d'équation. L'emploi d'intégrales et de dérivées ne semble pas nécessairement refléter la vraie nature des choses, mais plutôt une approximation convenable ; de sorte que les équations aux différences, que nous avons utilisées, sont en principe les plus fidèles à représenter les systèmes économiques.