CHAPITRE II

LES ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES

A. — LES ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES ET LA THÉORIE STATIQUE

14. — Il nous semble utile de discuter brièvement les relations et les différences entre les équations données au paragraphe 4 et les équations connues de la théorie statique générale.

D'une part, les équations élémentaires de notre schéma sont plus approximatives que les équations statiques. Elles le sont d'abord par leur caractère macro-dynamique ; elles peuvent être considérées comme l'addition d'un grand nombre d'équations analogues. Telles sont les équations (8), (9), (12) et (15). On peut imaginer que ces équations sont le résultat de l'addition d'équations pour chaque branche d'activité.

Les équations élémentaires apparaissent également plus approximatives parce que certaines grandeurs économiques y ont été considérées comme constantes et données, tandis que dans la théorie générale ces mêmes grandeurs sont déterminées par d'autres équations.

Il en est ainsi de toutes les grandeurs représentées par des symboles grecs qui ont le caractère d'élasticité ou de grandeurs similaires. Il en est de même de toutes les valeurs d'équilibre. On pourrait le justifier en disant que l'explication de ces grandeurs peut se faire à l'aide d'équations ne contenant que des grandeurs constantes ou considérées telles (voir paragraphe 1) et qui, par conséquent ne sont pas intéressantes pour la connaissance du mouvement.

Les équations ont enfin un caractère plus approximatif parce qu'on y a négligé certaines grandeurs qui en principe devraient y entrer. Considérant l'équation (9) on pourrait supposer qu'à côté du débit d'autres grandeurs encore ont une influence sur la formation des prix. Ces autres influences ont été négligées [1] dans l'équa-

(1) Comme on le sait, l'omission d'influences aléatoires n'a pas le caractère d'une approximation (voir paragraphe 1). Il n'est ici question que des influences systématiques.

tion (9) eu égard à l'hypothèse d'après laquelle ces influences agissent sur le niveau d'équilibre et non sur les déviations de ce niveau.

Cela posé, il n'est pas difficile de reconnaître dans nos équations élémentaires plusieurs des équations de la théorie statique. Certaines d'entre elles sont des équations budgétaires, comme (2), (5) et (8). D'autres sont des équations de la demande ou de l'offre, par exemple (14).

D'autre part, il y a quelques équations qui déterminent un *processus plus détaillé* que ne le font les équations statiques. Ce sont surtout les équations à caractère dynamique, comme par exemple (9) et (10). Alors que la théorie statique ne nous renseigne que sur la hauteur du niveau d'équilibre des prix, l'équation (9) nous décrit les étapes consécutives par lesquelles passe le niveau des prix avant que le niveau d'équilibre soit atteint, que cette position se réalise ou non. L'équation (10) surtout dans sa forme primitive a la même fonction en ce qui concerne les salaires. Ces équations sont analogues aux équations données par exemple par Ricci [1] à titre d'illustration, à propos de l'économie synthétique de Moore.

B. — LA DÉTERMINATION STATISTIQUE DES COEFFICIENTS ÉLÉMENTAIRES

15. Remarques générales.

Nous allons exposer brièvement la méthode de détermination statistique des coefficients élémentaires, en nous reportant spécialement à notre exemple central, sans discuter les problèmes de statistique théorique qui pourraient se présenter.

Comme nous l'avons déjà remarqué, c'est la théorie économique qui doit nous renseigner sur la nature des relations déterminant chaque variable. Nous avons déjà discuté le caractère de la théorie macrodynamique dont nous allons faire usage. Nous pouvons ajouter qu'il y a de nombreux problèmes dans ce domaine qui demeurent irrésolus, et qu'il est bien possible que les équations

(1) Die synthetische Ökonomie von Henry Ludwell Moore, *Zeitschrift fur Nationalökonomie*, I (1930), p. 649.

choisies soient dans l'avenir remplacées par d'autres. Il sera utile, à notre avis, que la discussion porte sur ces relations mises en équations et non pas dans une forme plus ou moins vague comme nous le voyons encore trop souvent.

Bien que la théorie économique doive être notre guide dans la recherche des équations élémentaires, il ne faut pas oublier que cette théorie elle-même peut être influencée et réformée par les résultats des recherches statistiques. Aussitôt qu'une relation posée par une théorie quelconque ne se conforme plus à la réalité — fait que décélera l'analyse statistique —, nous sommes dans l'obligation de modifier cette théorie. Il va sans dire que les équations élémentaires choisies dans notre exemple central sont, elles aussi, le résultat d'une confrontation entre la théorie et le contrôle statistique. Nous en rencontrons des exemples très nets.

Une autre remarque de caractère général se rapporte à la difficulté d'obtenir exactement les chiffres exigés par la théorie. Cette difficulté est considérable, surtout quand on étudie, non seulement l'industrie dans le sens restreint du mot, mais la société économique dans son intégralité. En général, les données concernant l'industrie sont assez complètes, alors que celles concernant toutes les autres branches d'activité sont plutôt rares. C'est aussi dans ce sens que nos résultats ont un caractère provisoire. Recueillir et calculer des données plus nombreuses nous paraissent des opérations essentielles dans ce domaine.

Le tableau ci-joint donne les résultats de calculs laborieux qui ont été nécessaires pour obtenir des valeurs approximatives de nos variables. Le mode de calcul a été indiqué dans les notes explicatives. On verra qu'il s'agit seulement d'une première tentative grossière ; beaucoup d'études détaillées et spéciales seraient désirables, qui cependant ne peuvent être entreprises que par une institution bien équipée.

La plupart des calculs ne donne lieu à aucune difficulté de principe de quelque importance. Il y a cependant certaines difficultés en ce qui concerne les revenus et l'épargne, où faute de connaissances plus précises, nous sommes contraints de formuler différentes hypothèses alternatives. Nous avons supposé ici que les gains spéculatifs proviennent de crédits créés par le système bancaire, ce qui veut dire qu'ils ne sont pas payés à l'aide de l'épargne d'autres personnes. Il s'en suit qu'il n'y a pas de différence entre l'épargne

DONNÉES STATISTIQUES CONCERNANT LA VIE ÉCONOMIQUE DES ÉTATS-UNIS, 1919-1932, EMPLOYÉES DANS L'EXEMPLE CENTRAL

Tous les chiffres sont exprimés en pourcent des unités choisies (voir paragraphe 2).

N°	Nomenclature	Symbole	Unité	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932
1	Quantité des biens de consommation vendus	$\bar{u}' + u'$	ø 1919-32 = 0,9	77	72	74	84	86	89	93	100	101	105	111	98	87	80
2	Nombre total des heures travaillées	$\bar{a} + a$	ø 1919-32 = 1	95	94	86	94	104	105	108	111	112	111	115	104	89	71
3	Heures travaillées dans la production des investissements nouveaux	$\bar{b} + b$	comme (2)	23	24	16	20	24	21	22	24	21	21	23	18	13	10
4	Prix des biens de consommation	$\bar{p} + p$	ø 1919-32 = 2	210	240	206	195	201	204	208	208	204	201	201	193	174	156
5	Taux des salaires.....	$\bar{l} + l$	ø 1919-32 = 1	88	110	99	95	99	101	103	105	106	107	109	104	94	80
6	Taux de l'intérêt	$\bar{m} + m$	%	573	674	676	548	550	511	498	506	488	534	604	507	461	505
7	Valeur totale des biens de consommation vendus	$\bar{U}' + U'$	34,4 × 10⁹ $	163	173	153	165	174	182	194	209	206	212	223	189	153	125
8	Somme totale des salaires	$\bar{L} + L$	»	83	102	85	89	102	105	110	116	116	117	125	108	83	57
9	Somme totale de tous les autres revenus ...	$\bar{Z} + Z$	»	107	98	70	89	101	105	124	119	122	138	132	90	62	42
10	Idem, non compris les revenus non distribués	$\bar{E} + E$	»	95	94	78	84	94	101	116	113	119	131	126	105	86	68
11	Partie dépensée de (10)	$\bar{E}' + E'$	»	74	72	59	65	73	80	96	87	95	111	107	78	65	53
12	Partie épargnée ou thésaurisée	$\bar{E}'' + E''$	»	21	22	19	19	21	21	20	26	24	20	19	27	21	15
13	Crédits créés par le système bancaire	$\bar{M} + M$	»	12	— 6	— 6	— 7	— 2	— 6	— 5	— 1	— 2	— 3	— 0	— 6	— 8	— 7

Notes explicatives sur le calcul des séries : ø = moyenne

1. $\bar{u}' + u' = \dfrac{\bar{U}' + U'}{\bar{p} + p}$. 2. $\bar{a} + a = \dfrac{\bar{L} + L}{\bar{l} + l}$. 3. Indice de la somme totale des salaires des industries des biens d'investissements (calculée d'après les indices des " *pay rolls* " de la *Fed. Reserve Board*), divisé par l'indice des salaires par heure selon la *Nat. Industrial Conf. Board ;* ce quotient a été réduit à la base ø 1919-32 = 20, puisque la valeur de la formation brute de capital est environ un cinquième de la valeur du revenu national. 4. Indice du coût de la vie (*Nat. Ind. Conf. Board*). 5. Indice des salaires par heure dans l'industrie selon le *Handbook of Labor Statistics*, complété pour les dernières années à l'aide de chiffres pour l'état de New-York ; indice des salaires dans l'agriculture selon le *Handbook of Labor Statistics* et le *Yearbook of Agriculture*. Pondération : industrie, etc. 10 ; agriculture 1. 6. Taux des banques selon le *Federal Reserve Board, (rate charged customers by banks in eight other northern and eastern cities)*. 7. Chiffres basés sur des calculs de Warburton, *Journal of the American Statistical Association*, 1934 (XXIX), p. 383, interpolés et extrapolés à l'aide de nombreuses autres séries : indices de la production de biens de consommation selon le *Federal Reserve Board*, indice du coût de la vie (voir 4), indices de la valeur de la production agricole (production animale), indices sur le loyer total (*America's Capacity to Consume, Brookings Institution*, 1934), indice du revenu des chemins de fer relatif au transport des voyageurs ; indice de la valeur de la consommation d'essence de pétrole. 8. Salaires des ouvriers (*wages*), augmentés de la moitié des salaires des employés (*salaries*) et des pensions ; jusqu'à 1929 d'après *America's Capacity to Consume* (*Brookings Institution*), depuis 1930, d'après les chiffres du Département du Commerce *Survey of Current Business*, août 1935, p. 16), multipliés avec un facteur adéquat. La légère différence entre la moyenne de la série obtenue et de la moyenne de la série 9 a été négligée, ce qui veut dire que les chiffres obtenus sont multipliés avec 0,98.

9. Somme des dividendes, des intérêts, des rentes, des revenus d'entrepreneurs privés, des profits sur le capital (*capital gains*, représentant les profits spéculatifs) et de la moitié des salaires des employés et des pensions. Chiffres selon les sources mentionnées (complétées pour les profits spéculatifs à l'aide d'évaluations). 10. Série 9, diminuée des profits non distribués (*business savings*) ; sources mentionnées.

11. $\bar{E}' + E' = E - E'' + \bar{E} - \bar{E}''$. 12. Chiffres de *Warburton, l. c.*, (" *gross savings* " — " *returned to income stream* "), avec interpolation et extrapolation à l'aide de chiffres du *Statistical Abstract of the United States*. (*Some major savings items ; income statistics*) et à l'aide d'estimations.

13. Somme de l'augmentation de la monnaie en circulation et de l'augmentation des dépôts à vue chez les banques.

brute et l'épargne nette telles qu'elles sont définies par Warburton (*l. c.*). Cet auteur, après avoir calculé l'épargne brute à l'aide d'évaluations, déduit de cette somme un montant qu'il appelle " *returned to income stream* " et qui est formé surtout par les gains spéculatifs. (D'après son hypothèse, la plupart de ces gains sont payés à l'aide de l'épargne d'autres personnes.) Il reste à savoir lequel des deux chiffres donnés par Warburton doit être retenu. Dans cette étude, nous avons retenu l'épargne nette, d'après les calculs de l'auteur cité, qui sont en bon accord avec les montants dépensés pour les nouveaux investissements, tandis que l'épargne brute ne peut pas être contrôlée directement. On aurait sans doute pu choisir le montant brut ; c'est ce que nous avons fait dans une autre étude (1) où du reste nous aboutissons à des conclusions tout à fait analogues à celles obtenues dans la présente étude.

Ces remarques faites, discutons brièvement l'établissement des équations élémentaires de l'exemple central. Dans cette discussion nous pouvons distinguer deux types d'équations. Il y a tout d'abord des équations dont nous avons simplement admis qu'elles sont exactes. Nous les avons utilisées en vue du calcul d'une de ces variables. Il va sans dire que cela ne peut pas se faire avec des équations dans lesquelles il y a un coefficient inconnu *a priori* (un de nos coefficients grecs). Les équations suivantes ont servi dans ce but :

l'équation	(1)	pour	en	calculer	a_t (2) ;
»	(2)	»	»	»	E_t^g ;
»	(3)	»	»	»	u_t' (2) ;
»	(8)	»	»	»	u_t.

Les autres équations ont été choisies, quant aux coefficients grecs, de manière à aboutir à des coefficients de corrélation maximum. C'est dire que les coefficients grecs ont été pris égaux aux coefficients de régression dans les équations de la forme donnée ci-dessus, avec cette seule généralisation qu'une ligne de tendance générale a été supposée exister dans les cas où cela semblait nécessaire. Parmi les différents plans de régression, on a choisi celui déterminé par les conditions suivantes :

(1) On the theory of business cycle policy, *Econometrica*, 5, 1937.

(2) Au cours des calculs numériques, cette équation a été mise à contribution dans sa forme exacte (non-linéaire).

1° les coefficients de régression sont proportionnels aux coefficients qu'on obtient quand la variable du membre à gauche est considérée comme variable dépendante et inexacte, alors que les autres sont supposées être variables indépendantes et exactes ;

2° leur valeur absolue est telle que l'écart type de la variable observée et celui de la variable calculée sont égaux.

Désignant d'une manière générale, les variables par x_1, x_2, ..., où x_1 est la variable dépendante, et les coefficients utilisés par b_2, b_3, ... ceux-ci sont, en usant de la notation usuelle :

$$b_2 = \frac{b_{12\cdot 3\cdots n}}{R_{1\cdot 23\cdots n}}.$$

Les périodes de décalage ont été déterminées de manière à avoir un maximum de corrélation. Pour quelques variables, nous ne disposons cependant que de chiffres annuels ; la détermination des décalages résulte donc d'une évaluation approximative.

Le degré de concordance entre les variables observées et calculées est illustré par la figure 3 (1).

16. Discussion statistique des équations élémentaires.

Les remarques suivantes (numérotées comme les équations auxquelles elles se rapportent) nous sont suggérées à propos d'un certain nombre d'équations.

(4) *Le calcul des profits* (fig. 8). — Le fait le plus remarquable que révèle la courbe des « profits », Z_t, est l'antécédance très nette des maxima sur ceux de l'activité générale, comme celle-ci s'exprime par la courbe u_t ainsi que par b_t. Ce fait ne s'explique que par une influence de la vitesse des variations de quelques grandeurs se développant parallèlement à la conjoncture. Cette circonstance semble pouvoir être interprétée d'une façon satisfaisante par la formation des revenus spéculatifs, ce qui d'ailleurs est d'accord avec quelques analyses statistiques. La figure suggère que l'in-

(1) Les recherches ont été effectuées en deux étapes. Premièrement, on a déterminé globalement à l'aide de graphiques, si les variables du membre droit de chaque équation peuvent approcher suffisamment les variables de ce membre ; et ce n'est que lorsque des résultats acceptables s'annonçaient qu'on a procédé à des calculs plus précis.

fluence de $\dot{Z}_t$ est curviligne (cette influence est relativement plus grande lorsque $\dot{Z}_t$ est grand que lorsque celui-ci est petit).

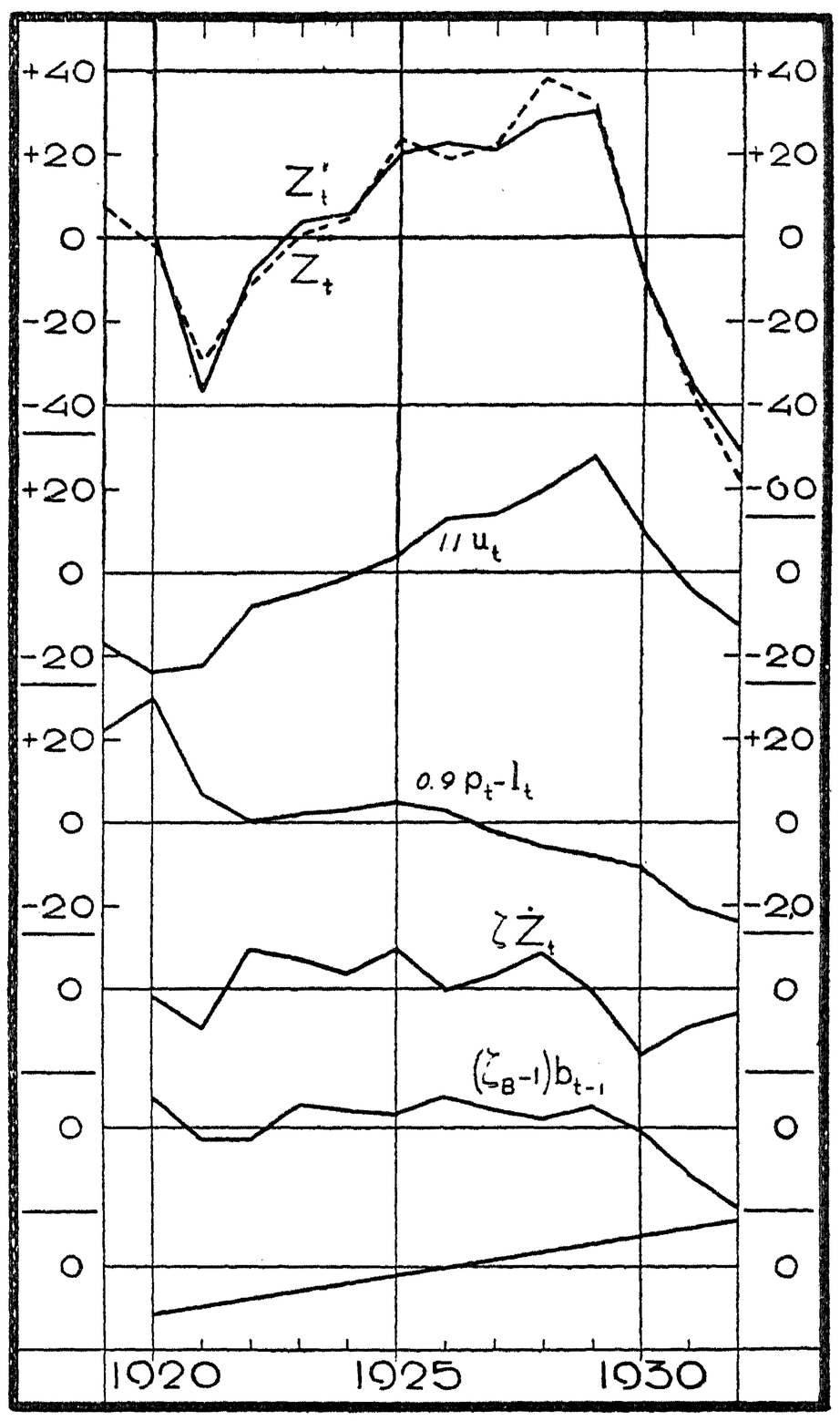

FIG. 8. — « Explication » des mouvements des profits Z_t. Dans les figures 8-16, la courbe pointillée représente la série observée, tandis que la série supérieure en plein trait indique les valeurs calculées à l'aide de la formule vérifiée. Les autres courbes indiquent, à une échelle comparable, les composantes de la série calculée. L'expression analytique des composantes a été indiquée à côté et correspond aux membres de l'équation en question

La valeur de ζ_B est assez incertaine. Quand on adopte la période 1920-1932 comme base des calculs, on trouve environ la valeur 5 ;

cependant prenant la période 1919-1930 (1), cette valeur décroît sensiblement et est approximativement égale à 2.5 ; nous avons choisi en définitive 3.5. Cela est assez arbitraire ; il sera nécessaire

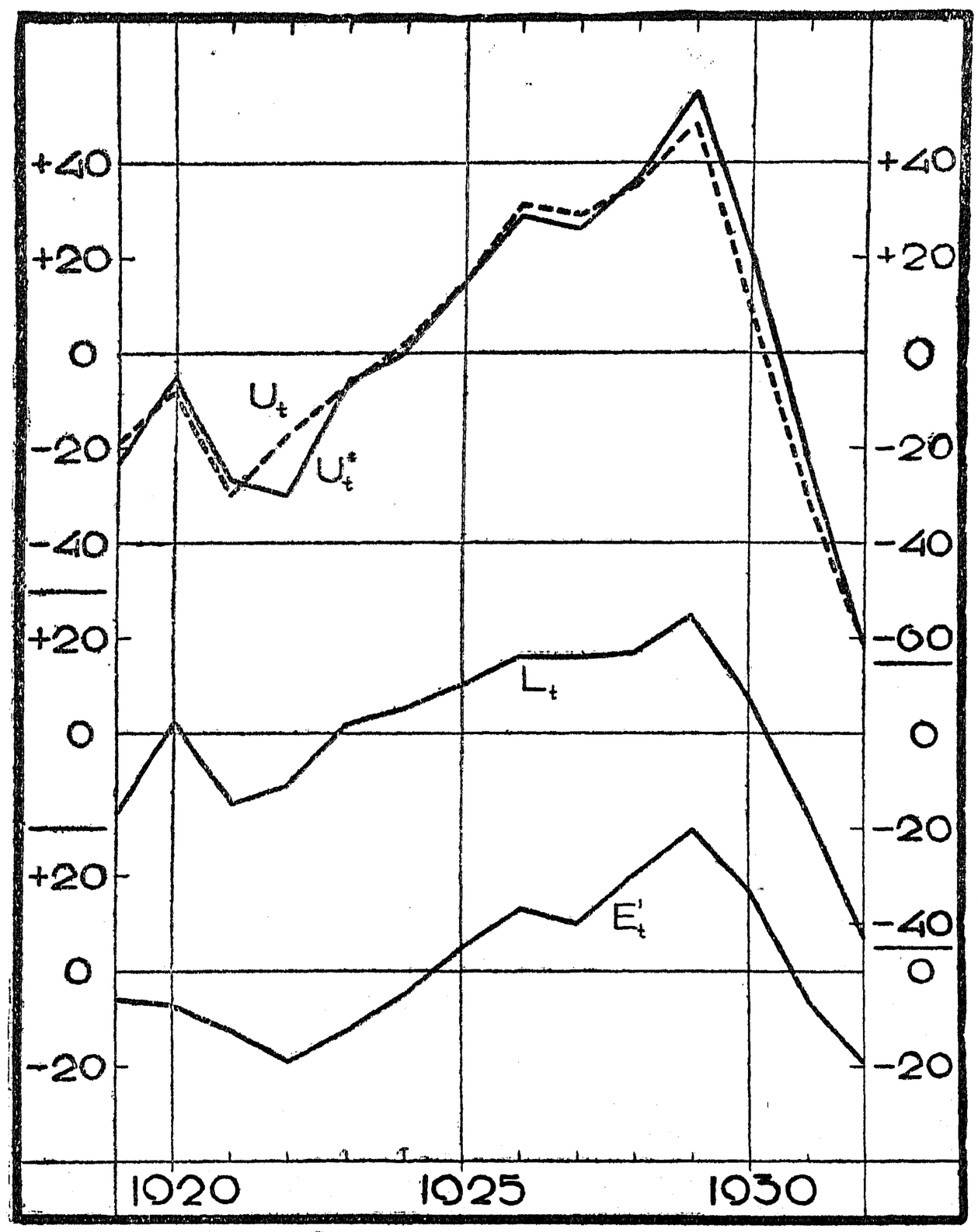

FIG. 9. — « Explication des mouvements du débit des biens de consommation (voir fig. 8).

que l'on précise, par des recherches plus détaillées, la valeur de ce coefficient. Dans notre exemple central, il a une influence très nette sur la longueur de la période. En considération de ce fait, il ne faut pas perdre de vue l'exactitude très relative de la longueur que nous

(1) Nous avons adopté cette période parce que la prévision d'une dévaluation de la livre sterling en 1931 avait eu une influence nullement négligeable sur Z.

avons trouvée. Il est cependant important de retenir, comme nous l'avons déjà affirmé, que les problèmes de la politique conjoncturelle ne sont pas sérieusement influencés par les grandeurs de ζ_B et de la période du mouvement « naturel ».

(5) *Le débit des biens de consommation* (fig. 9). — Il est remarquable que la corrélation soit mauvaise si l'on suppose que les

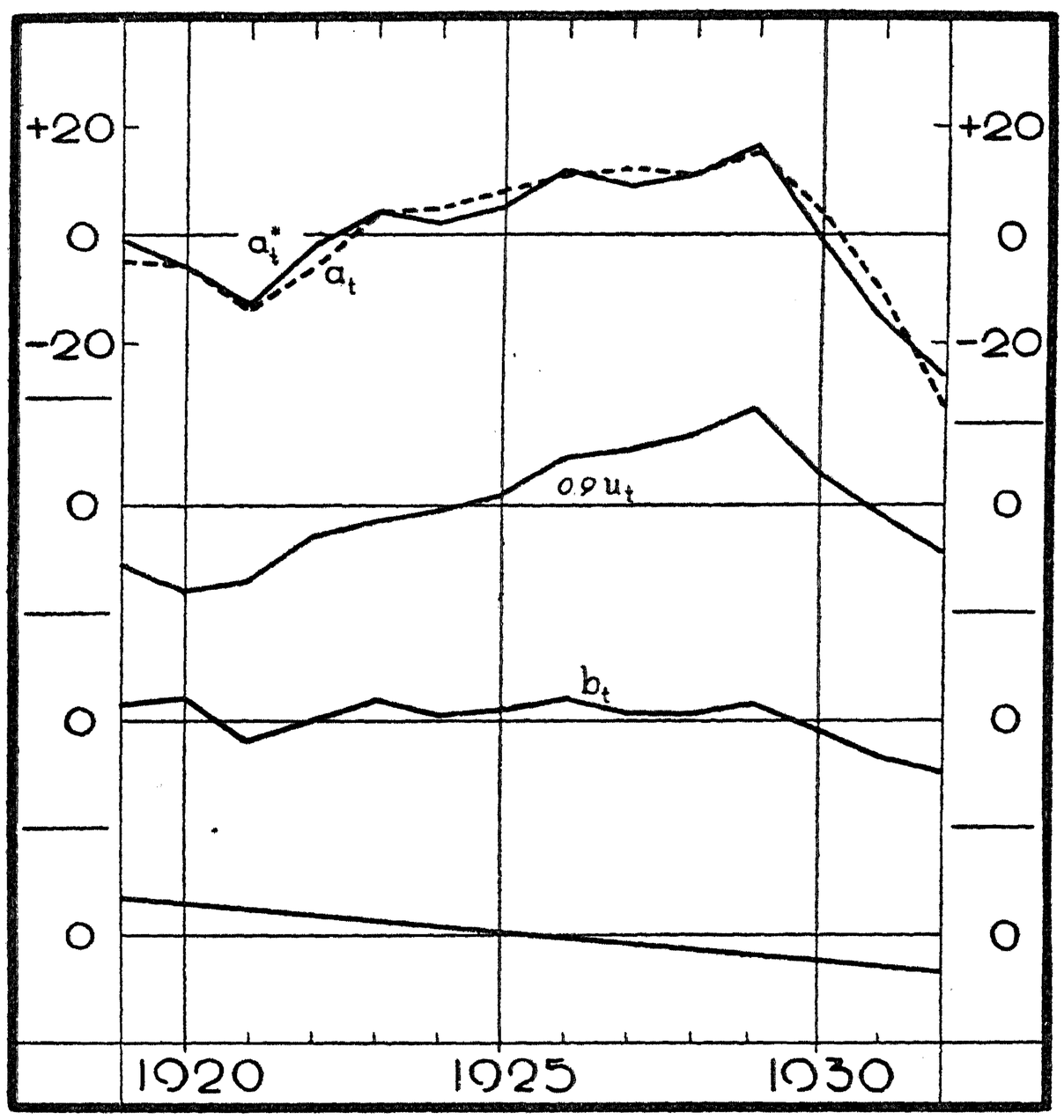

FIG. 10. — « Explication » des mouvements de l'emploi (voir fig. 8).

revenus non-ouvriers sont dépensés immédiatement. C'est pourquoi nous postulons un certain décalage. Même avec un décalage, la déviation de l'année 1922 est peu satisfaisante.

(6, 7) *Les équations du travail* (fig. 10). — Il semble que la corrélation pourrait être améliorée encore un peu en supposant que c_t présente un certain décalage. Pour l'année 1932, on voit que l'hypothèse trop simple relative à la productivité du travail n'est plus valable : la productivité étant remarquablement élevée cette année-là.

(9) *Les prix* (fig. 3, page 20). — Quoique la corrélation ne soit pas aussi bonne qu'on pourrait le souhaiter, il est remarquable qu'aux environs de 1920 les deux courbes se ressemblent plus que, par exemple, l'une de ces courbes d'une part et de l'autre Z_t, E_t ou a_t ne ressemble à p_t. Nul doute ne subsiste du reste sur la période de décalage qui est en effet considérable, 9 mois.

(10) *Les salaires* (fig. 3, page 20). — Un fait remarquable se présente : contrairement à l'expérience d'autres pays et d'autres

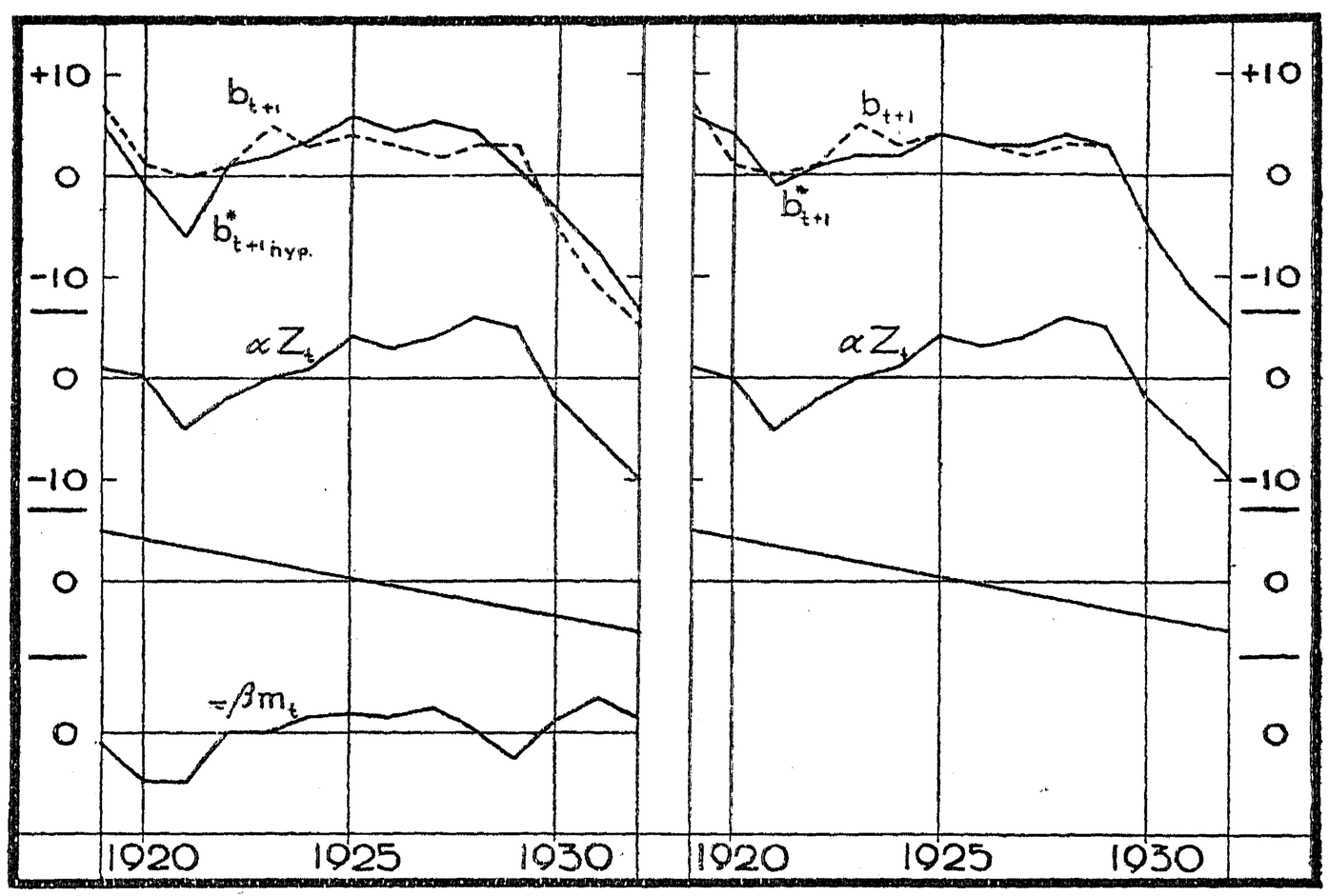

FIG. 11. — « Explication » des fluctuations de l'emploi dans les industries de biens d'investissement (l'expansion) (voir fig. 8).

périodes, l'influence de l'emploi semble être négligeable. Ce résultat n'est du reste pas certain, à cause de la haute corrélation existant entre les deux facteurs déterminants $\tilde{a}$ et $p_{t-[10]}$. La valeur du coefficient 0.63 est elle aussi remarquable ; elle signifie que le pouvoir d'achat du salaire horaire aux États-Unis est plus bas au cours de la dépression qu'au cours de la prospérité, fait qui en général ne se présente pas en Europe. L'adaptation des salaires est donc rigoureux en Amérique ; le système des salaires proportionnels aux nombres indices du coût de la vie aurait eu pour conséquence un mouvement plus stable des salaires !

(11) *L'Expansion* (fig. 11). — L'influence souvent présumée du

taux de l'intérêt sur l'expansion n'a pu être découverte (1). Afin de montrer plus nettement ce qu'en effet les chiffres suggèrent, à savoir que cette influence est petite, nous avons dessiné une figure hypothétique à gauche de la figure réelle. Dans la figure hypothétique, on voit quelle serait la forme de la courbe du travail pour les nou-

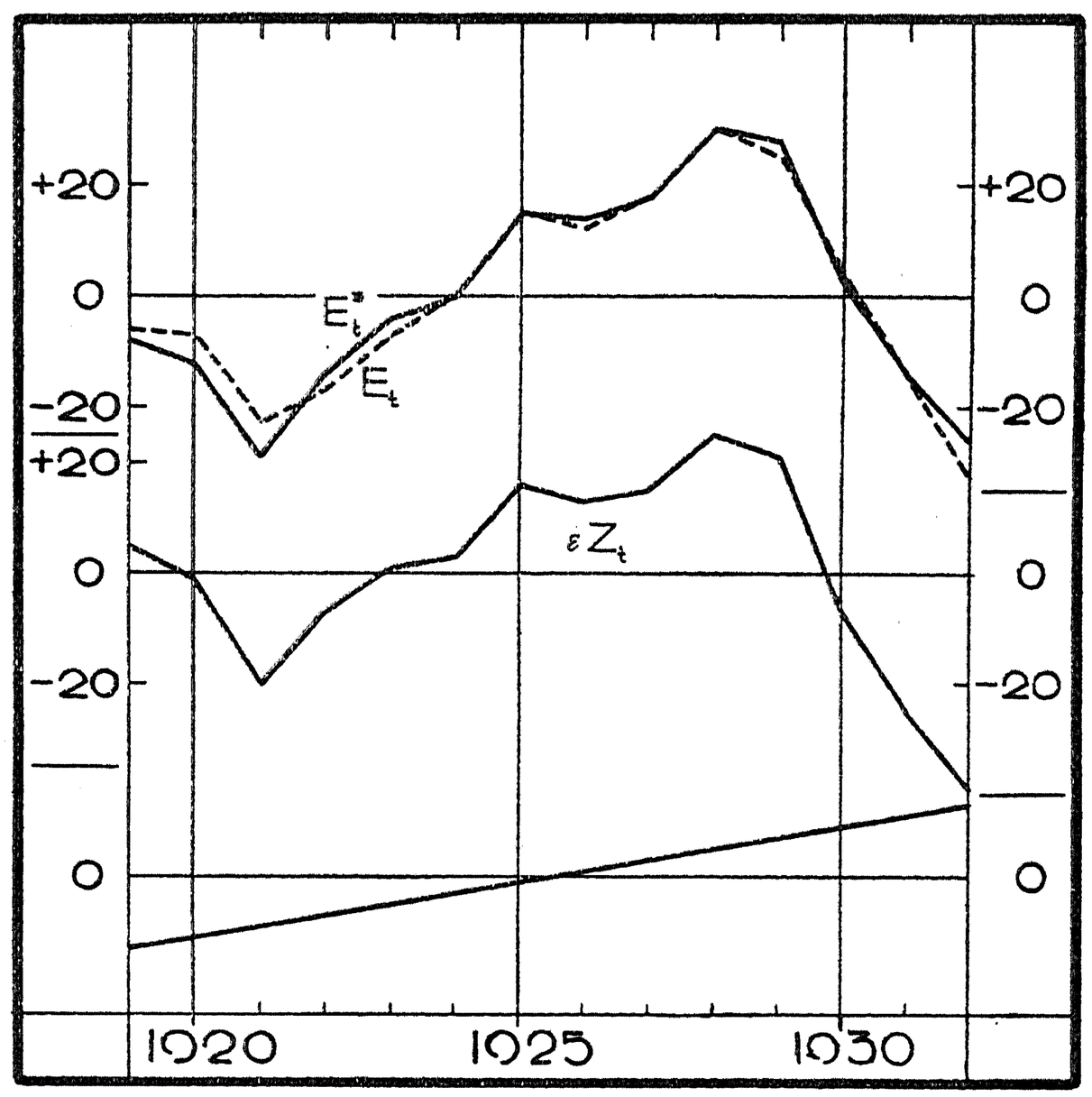

FIG. 12. — « Explication » de la distribution des profits (les revenus non-ouvriers) (voir fig. 8).

veaux investissements, si le taux de l'intérêt avait une action modérée. Dans la figure réelle, on voit que cette forme n'existe pas et que du reste la courbe se rapproche assez bien de la courbe de Z (2). La période de décalage pouvait être déterminée assez exactement à cause des changements caractéristiques que subit la

(1) En principe, il est possible qu'une influence non négligeable existe, alors que les fluctuations du taux de l'intérêt étaient plus grandes qu'aujourd'hui.

(2) Une certaine preuve du caractère symptomatique du taux de l'intérêt pourrait être vue dans le fait qu'en Europe ce taux présente des cycles courts qui sont absents dans les autres variables importantes.

courbe b_{t+1}, lorsqu'on lui fait subir une translation d'un mois. Dans ce cas la corrélation baisse nettement (1).

(12) *La distribution des profits* (fig. 12). — Bien que la corrélation soit bonne et assez satisfaisante pour une première approximation, il convient d'observer que certaines catégories de revenus qui ressortent sous E laisseront probablement apercevoir une

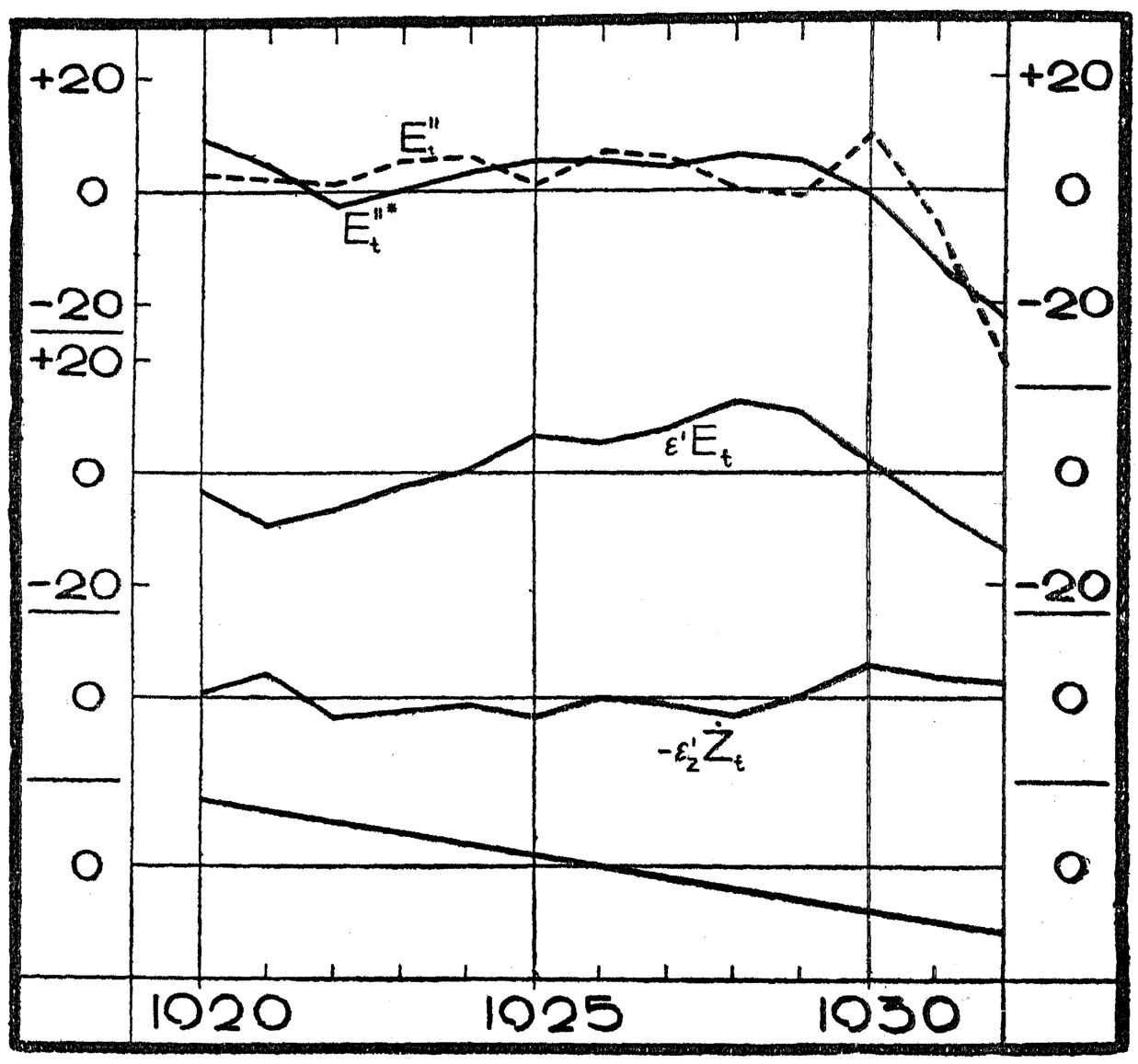

FIG. 13. — « Explication » des mouvements de l'épargne net (voir «g. 8).

dépendance des réserves (2), et décèleront un certain décalage entre Z et E, tandis que d'autres revenus sont liés à la vitesse des variations manifestées par les conditions économiques, ce qui introduit

(1) Une opinion contraire sur le rôle du taux de l'intérêt est énoncée par TINTNER, *Prices in the Business Cycle*, publication de l'Institut Autrichien de Recherches économiques et de l'École Supérieure d'Économie de Londres. Nous avons critiqué cette opinion dans la *Zeitschrift für Nationalökonomie*, VII (1936). Récemment beaucoup d'économistes ont cru que l'accroissement des constructions de logements en Angleterre, au cours de ces dernières années, était la preuve inconstestable de l'influence du taux de l'intérêt sur les investissements. Il est remarquable que les rédacteurs de *The Economist* soutiennent un avis contraire dans leur article du 26 octobre et du 2 novembre 1935 (p. 795 à 844).

(2) Voir par exemple *De Nederlandsche Conjunctuur*, août 1935, p. 20.

une tendance à un décalage en sens inverse. Dans une seconde approximation on pourrait tenir compte de ces suggestions.

(13) *L'épargne* (fig. 13, 14 et 15). — La corrélation entre E″ et E″* est mauvaise. C'est le point faible de notre exemple central. Les connaissances imparfaites des phénomènes en question, aussi bien que le caractère compliqué des relations, peuvent en être la cause. La corrélation n'est cependant pas aussi mauvaise que pour-

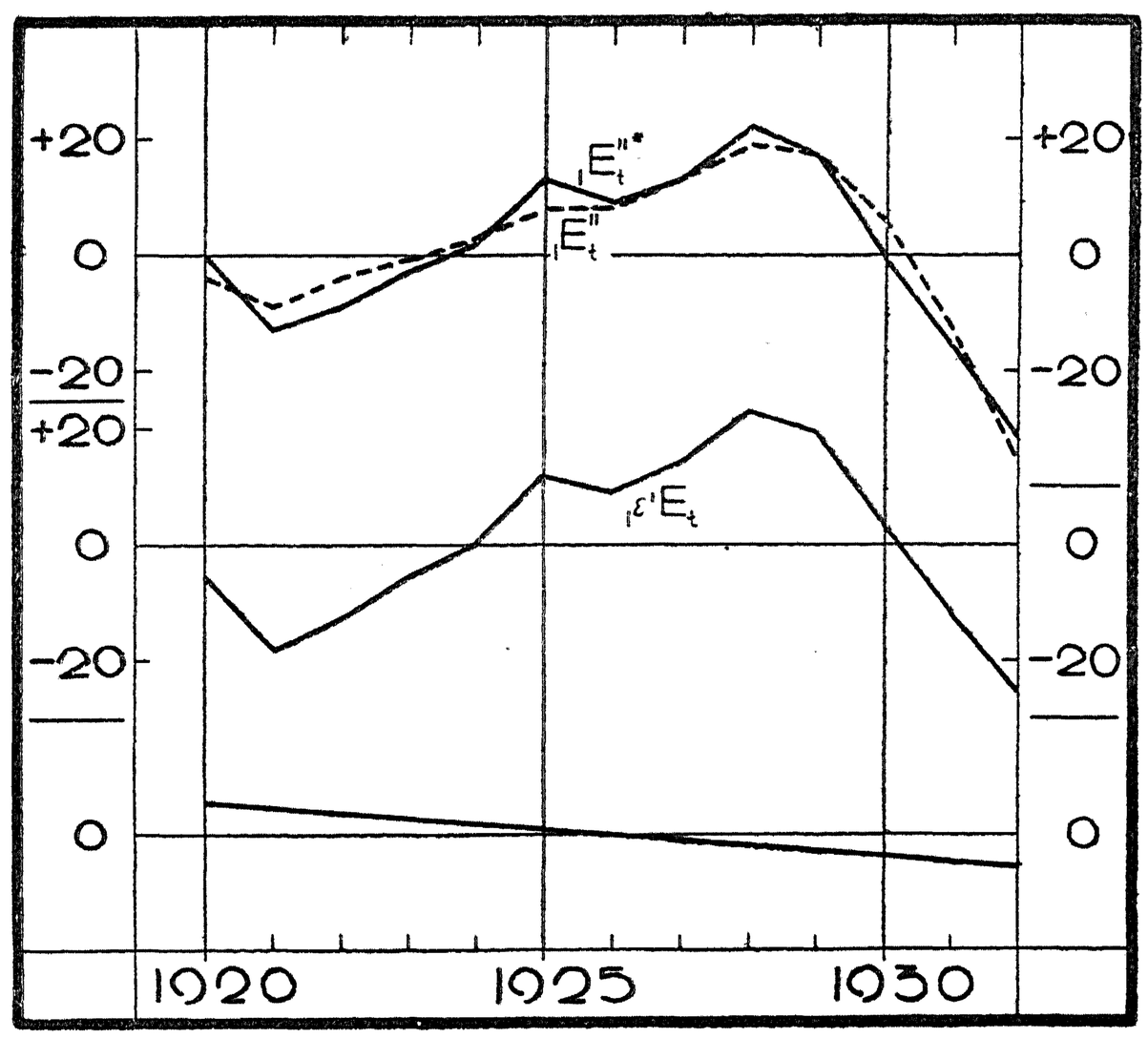

FIG. 14. — « Explication » des mouvements de l'épargne brut (voir fig. 8).

rait le laisser croire la figure 13. Notre grandeur E″ est la différence de deux autres grandeurs, à savoir l'épargne brute et le montant de cet épargne qui « n'est pas dirigée vers les entreprises », mais qui est utilisée à faire des paiements aux assurés, et aux spéculateurs de fonds et de marchandises. Or, les figures 14 et 15 nous montrent que la corrélation obtenue pour ces deux séries composantes de E″ est assez bonne, quand on suppose que E est le seul facteur déterminant de l'épargne brute, tandis que E et $\dot{Z}$ sont les facteurs déterminant du « montant retourné ». La supposition que $\dot{Z}$ possède une influence sur ce montant ressort logiquement du fait qu'il

contient les revenus spéculatifs. La corrélation obtenue pour ces deux séries serait meilleure encore si nous avions supposé une relation curviligne entre $\dot{Z}$ et le montant retourné.

(14) *Le taux de l'intérêt* (fig. 16). — La corrélation obtenue pour cette série est assez bonne, principalement parce que nous avons

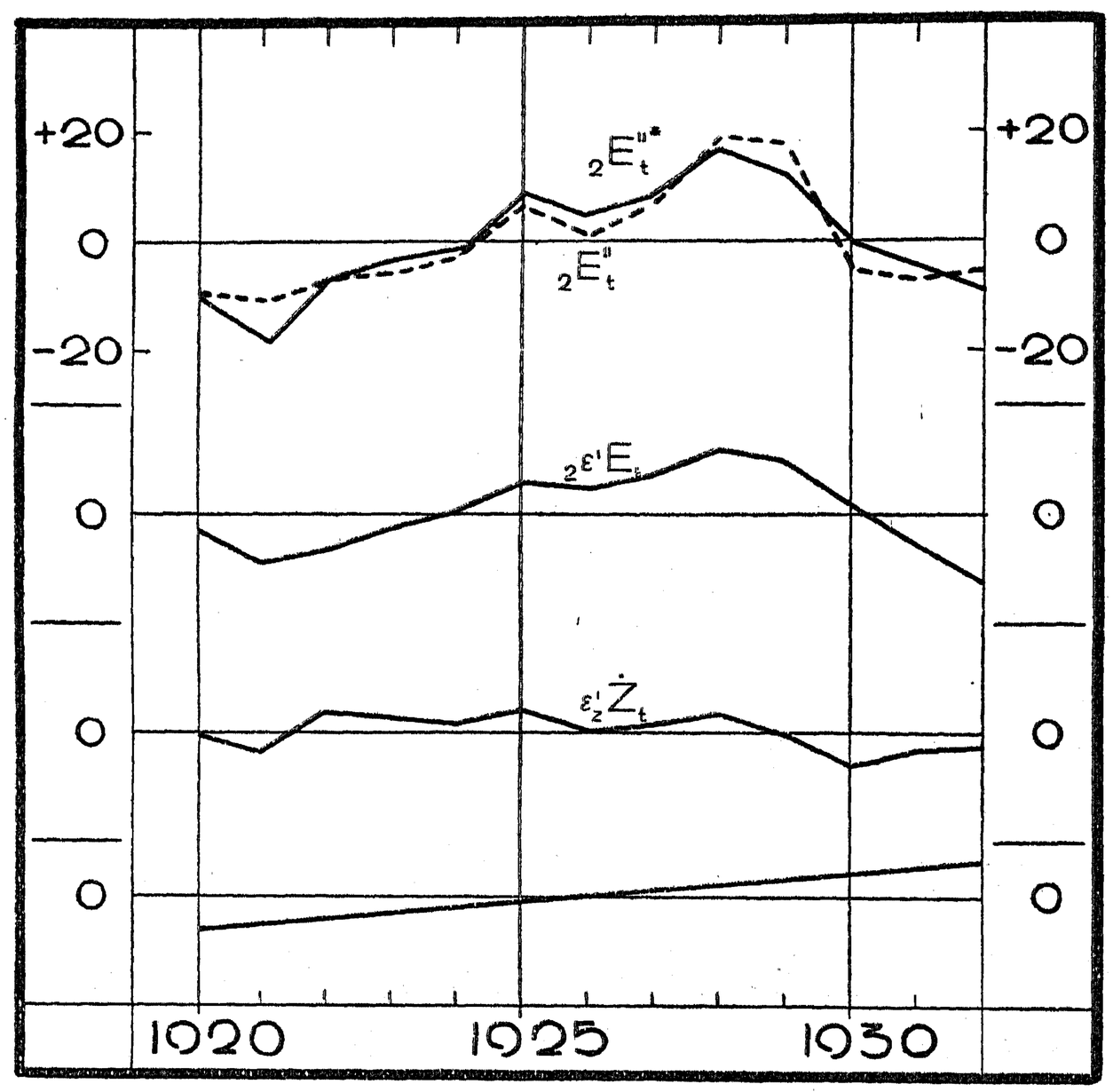

FIG. 15. — « Explication » des mouvements du montant retourné (la partie de l'épargne brut qui n'est pas disponible aux nouveaux investissements) (voir fig. 8).

ajouté, comme facteur déterminant, le stock d'or monétaire. Il convient de considérer ce stock comme une grandeur exogène en raison des événements extra-économiques et semi-économiques qui agissent sur lui. Cependant, puisque le taux de la monnaie a le caractère d'une variable symptomatique dans notre exemple central, nous aboutissons à la conclusion remarquable que, *bien que le stock d'or influence sans doute le taux de l'intérêt et, par conséquent, la politique des banques centrales, son influence sur les mouvements de la production demeure discutable.* C'est seulement une influence

indirecte qui, à notre avis, joue ici un rôle. En effet, si le stock d'or n'avait pas été aussi important qu'il l'a été en réalité, l'expansion aurait peut-être atteint bien avant 1929 un plafond déterminé par le facteur monétaire.

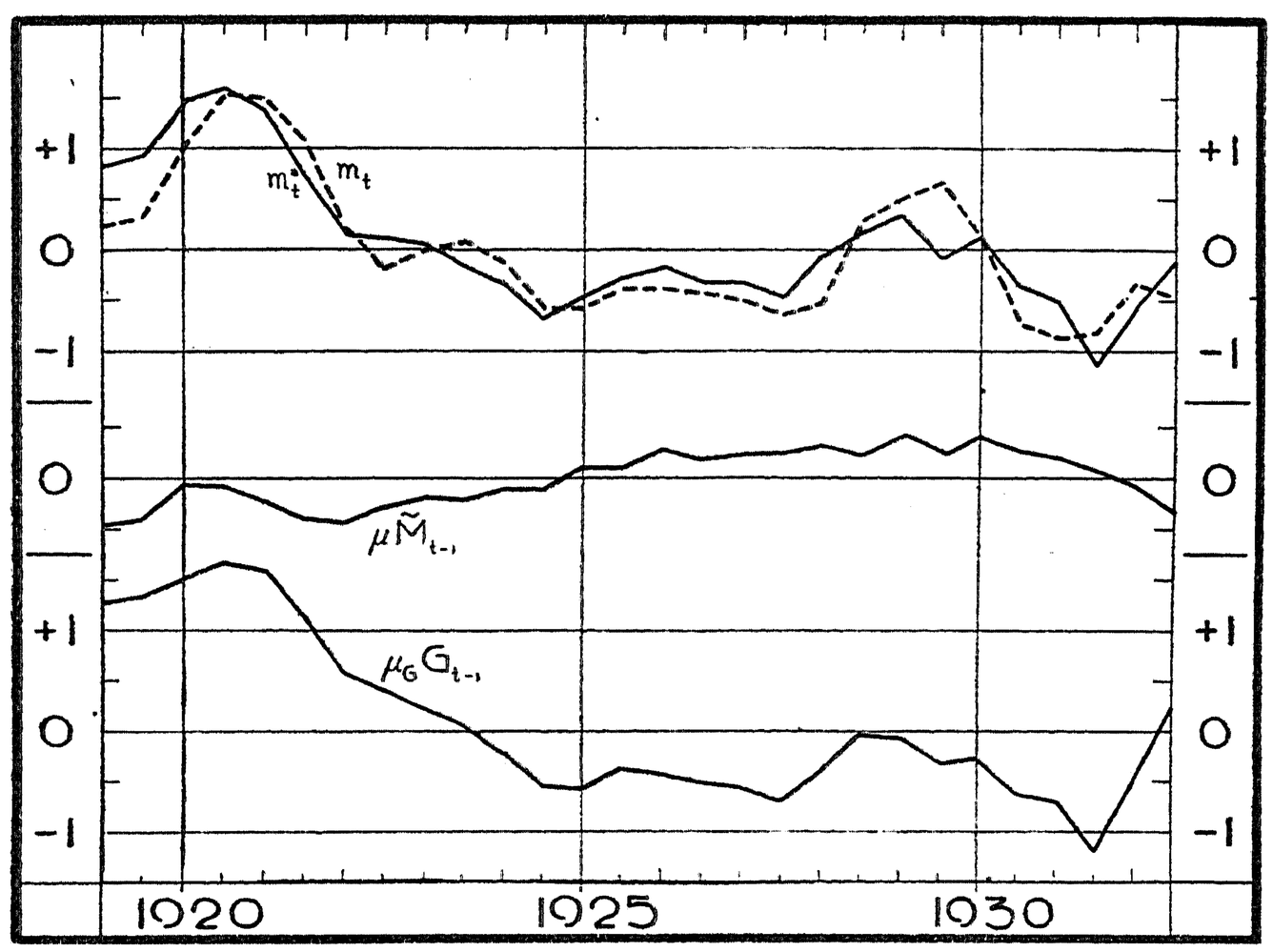

FIG. 16. — « Explication » des fluctuations du taux de l'intérêt (voir fig. 8).

C. — GÉNÉRALISATIONS DE L'EXEMPLE CENTRAL

17. L'EXTENSION DU NOMBRE DE VARIABLES.

Nous examinerons maintenant quelques généralisations de l'exemple central ; elles nous montreront que la méthode appliquée peut être utilisée pour bien d'autres approximations de la réalité.

Tout d'abord remarquons que certaines formules peuvent servir à des schémas très divers. Il en résulte que toutes les conclusions tirées à propos du type de mouvements et de politique à suivre demeurent valables : toutefois l'interprétation d'un ou plusieurs des coefficients peut être modifiée. Nous avons déjà remarqué, à cet égard, que, sous certaines conditions, le rejet du commerce extérieur ne modifie pas nos équations.

On peut cependant généraliser le schéma par d'autres moyens. Nous en considérons quelques-uns. Tout d'abord le nombre de variables peut être accru. Quelques exemples importants d'une telle extension vont être donnés. Le premier consiste à inclure, dans le schéma et d'une manière plus précise, des *relations internationales*. Nous avons remarqué que, dans l'exemple des États-Unis, cela ne semblait pas être nécessaire. Par contre, cette nécessité subsiste pour beaucoup d'autres pays ; traçons un système qui paraît plus exact pour ces pays. Pour ce faire, il faudra transformer l'exemple central de la manière suivante (1).

Indiquons par $\widehat{U}'_{At}$ *l'excédent des exportations sur les importations* (comme on s'en souvient, il n'y a qu'une seule espèce de biens) ; il faudra tout d'abord ajouter un terme à l'équation (6), qui devient

$$(6') \qquad U'_t = L_t + E'_t + \widehat{U}'_{At}$$

Deuxièmement, il faut ajouter une équation déterminant $\widehat{U}'_{At}$. Étant donné le niveau des prix à l'étranger considéré constant (il y a lieu, dans ce qui suit, d'abandonner cette hypothèse) on pourra supposer que $\widehat{U}'_{At}$ dépend du niveau des prix p_t et du *change*, que nous indiquerons par w_t (2), par exemple

$$\widehat{U}'_{At} = -\eta_p p_{t-[16]} + \eta_w w_{t-[16]},$$

où le symbole [16] exprime, comme ci-dessus, une période de décalage.

Troisièmement, nous introduisons la notion de *crédits fournis par l'étranger* M_{At}. Leur montant dépendra — dans l'hypothèse d'un niveau donné du taux de l'intérêt à l'étranger — du taux de l'intérêt national et du cours du change, soit

$$(17) \qquad M_{At} = \mu m_{t-[17]} + \mu' w_{t-[17]}.$$

En même temps l'équation (15) se transforme en

$$(15') \qquad M_{At} + M_t + E_t - E'_t + U'_t = L_t + E_t.$$

On aura à ajouter une équation déterminant le cours du change, c'est-à-dire la *balance des paiements*.

---

(1) Voir aussi notre étude intitulée *An Econometric Approach Business Cycle Problems*, Hermann, Paris, 1937.

(2) Il va sans dire que par analogie avec ce qui précède w_t représente la déviation entre le cours du change et sa valeur d'équilibre.

$$M_{At} + \widehat{U}'_{At} + W = 0, \tag{19}$$

où W indique l'afflux d'or. Cette équation peut signifier deux choses, ou bien on peut considérer l'afflux d'or comme donné (comme une perturbation, si l'on veut) et le cours du change déterminé par (19) ; ou bien on peut supposer que le cours du change est une grandeur constante et donnée, déterminant l'influx d'or (positive ou négative) nécessaire au maintien des cours. Dans ce cas, on aura $w_t = 0$, ce qui a pour effet de simplifier les équations (16) et (17), tandis que l'équation (19) devient superflue dans le système : elle ne définit que la grandeur symptomatique W.

Un deuxième exemple d'extension du nombre des variables est fourni par l'introduction de la *productivité du travail* comme grandeur variable. Cela ne modifie que l'équation (6), qui devient

$$c_t = 0.9(u_{t-[7]} + g_t), \tag{6'}$$

où g_t représente la déviation de la productivité du travail par rapport à sa valeur d'équilibre. Tout comme l'équation (6), la nouvelle équation n'est qu'une approximation, valable pour les petites valeurs de p, l et q.

De plus, une équation doit être ajoutée, déterminant la grandeur g_t. Comme nous l'avons exposé ailleurs (1), une approximation suffisante peut être obtenue par la relation

$$g_t = -\gamma \tilde{u}_{t-[18]}, \tag{18}$$

dans laquelle, pour un nombre de branches industrielles, la période [18] a la longueur d'environ une demi-année (2).

Il est encore d'autres possibilités. On peut, par exemple, considérer séparément la production et la vente de matières premières et de produits finis (*division verticale*). C'est ainsi que nous avons procédé dans notre étude concernant la proposition de Goudriaan (3); utilisant d'ailleurs un schéma plus simple. L'avantage d'une telle division verticale du marché réside dans la possibilité de tenir

(1) Voir par exemple *Econometrica*, 1935, III, p. 248.

(2) On observera que le système d'équations présenté jusqu'ici ressemble beaucoup au système donné dans la *Weltwirtschaftliches Archiv*, 42, 1935, p. 366. Il y a cependant quelques différences apparues au cours de recherches faites ultérieurement.

(3) Pour cette proposition voir par exemple GOUDRIAAN, How to Stop Deflation, *The Search Publ.*, 1932. Pour l'étude en question, voir notre article : Ueber den Wert mathematischer Konjuukturtheorien, dans *Beiträge zur Konjunkturlehre*, Berlin, 1936.

compte du rôle des stocks des matières premières dans le cycle [1].

Une quatrième extension du nombre des variables est le résultat d'une *division horizontale* du marché. Cette division peut être fondée sur la distinction entre les biens durables et les biens non-durables, (je prie le lecteur de se reporter pour cette discussion au paragraphe suivant) ou bien sur la distinction entre des biens concurrents en général. Dans ces deux cas, il faudra introduire des coefficients d'élasticité d'une manière plus apparente que nous ne l'avons fait jusqu'ici. Dans l'exemple central, ce sont les coefficients ε' et ε'_Z seuls qui commandent la distribution du revenu entre l'épargne et les dépenses. Aussitôt que l'on introduit plusieurs biens, ce problème se retrouve d'une manière plus explicite. En indiquant deux biens par les indices B et C, on aura les changements suivants dans nos équations :

$$(1'') \quad L_t = l_t + a_t$$

$$(2'') \quad E_t = E'_t + E''_t$$

$$(3'') \quad U'_{Bt} = \bar{u}_B p_{Bt} + 2u'_{Bt}, \; U'_{Ct} = \bar{u}_C p_{Ct} + 2u'_{Ct}$$

$$(4'') \quad Z_t = 2u'_{Bt} + 2u'_{Ct} + \bar{u}_B p_{Bt} + \bar{u}_C p_{Ct} - l_t - c_t + (\zeta_B - 1) b_{t-[4]} + \zeta \dot{Z}_t$$

$$(5'') \quad U'_{Bt} + U'_{Ct} = L_t + E'_{t-[5]} + \widehat{U}'_{At}$$

$$(6'') \quad c_t = \gamma_B u_{Bt} + \gamma_C u_{Ct}$$

$$(7'') \quad a_t = b_t + c_t$$

$$(8'') \quad u_{Bt} = u'_{Bt}, \; u_{Ct} = u'_{Ct}$$

$$(9'') \quad p_{Bt} = \pi_B u_{Bt-[9]}, \; p_{Ct} = \pi_C u_{Ct-[9']}$$

$$(10'') \quad l = \lambda_a a_t + \lambda_p \left[\bar{u}_B p_{Bt-[10]} + \bar{u}_C p_{Ct-[10]}\right]$$

$$(11'') \quad b_t = \alpha Z_{t-[11]} - \beta m_{t-[11]}$$

$$(12'') \quad E_t = \varepsilon Z_t$$

$$(13'') \quad E''_t = \varepsilon' E_t + \varepsilon'_z \dot{Z}_t$$

$$(14'') \quad m_t = \mu_M \widetilde{M}_{t-[14]}$$

$$(15'') \quad M_{At} + M_t + U'_{Bt} + U'_{Ct} = L_t + E'_t$$

$$(16'') \quad \widehat{U}'_{At} = -\eta_B p_{Bt} - \eta_C p_{Ct}$$

$$(17'') \quad M_{At} = \mu m_t$$

(1) L'étude des stocks depuis 1890 (*De Ned. Conjunctuur*, mars 1933, p. 17) nous a donné l'impression que ce rôle a été assez modeste. Telle est la raison qui nous a amené à négliger ce problème dans notre exemple central.

Il faut ajouter une nouvelle équation justement du type annoncé, c'est-à-dire une équation indiquant la répartition des dépenses entre les deux biens. On peut ainsi supposer que l'on a

$$\frac{\bar{u}_C + u'_C}{\bar{u}_B + u'_B} = \theta_0 - \theta_1 \frac{\bar{p}_C + p_C}{\bar{p}_B + p_B},$$

ce qui donnerait, en négligeant les termes quadratiques, une équation de la forme

$$u'_C + \theta' p_C + \theta'' u'_B + \theta''' p_B = 0.$$

La division horizontale du marché est également concevable en adoptant la distinction entre la demande ou l'offre de différentes personnes ou firmes. Un exemple important dans les discussions sur les cycles se trouve constituée par la distinction entre les banques privées, la banque centrale et les autres entreprises en ce qui concerne leur offre de crédit à court terme. Pour certains problèmes, il est très utile de procéder à cette discrimination. Dans ce cas il faut introduire des coefficients bien connus dans la théorie du polypole ; on arrive à des équations plus ou moins analogues à celles que nous venons de discuter.

Il y a une troisième division horizontale qui sous certaines conditions peut prendre de l'importance : celle résultant de la distinction entre les industries « âgées » et « nouvelles ». Les dernières sont spécialement tributaires des nouveaux investissements.

Enfin le nombre de variables peut être étendu par l'adjonction des stocks à côté des « flux » (production, ventes, consommations, etc...). Ces stocks ont un intérêt spécial pour les matières premières ainsi que pour les biens de longue durée. Ils ne sont pas explicites dans notre exemple central. Cela ne signifie pas, cependant, qu'il n'y a pas de stocks dans ce schéma. Nous l'avons déjà remarqué, les stocks ont le caractère de variables symptomatiques, c'est-à-dire qu'ils sont influencés par les autres variables, sans que celles-ci le soient par les stocks. Le fait que, pour les biens de consommation, les ventes $\bar{u}' + u'_t$ sont égales à $\bar{u} + u_t$ c'est-à-dire aux quantités dont la production a commencé, entraîne qu'elles ne sont pas égales aux quantités que la production vient d'achever, à savoir à $\bar{u} + u_{t-[8']}$ (1). Il y a donc des stocks

(1) La période [8'] sera par exemple deux fois [8].

modifiables de biens de consommation. Par analogie il y a des stocks variables de biens d'investissement ; ces stocks dépendent de la durée de ces biens et de la distribution de ces durées. Dans l'exemple, aucune hypothèse n'a été explicitement faite au regard de ces durées ; mais l'hypothèse implicite nécessaire est que ces durées sont telles qu'à chaque instant un stock suffisant pour la production $\bar{u} + u'_t$ est présent.

C'est seulement dans cette hypothèse d'une certaine abondance des stocks qu'il est admissible de considérer ceux-ci comme des variables symptomatiques. Aussitôt que les stocks tendent à se réduire à zéro, leur influence devient probable tant sur les prix des biens de consommation que sur le volume maximum de la production de ces biens. On peut généraliser le système d'équations en ajoutant pour toute catégorie de biens :

a) une équation définissant la notion de stock, par exemple

$$\tilde{\tilde{u}}''_t = \tilde{\tilde{u}}_{t-[8']} - \tilde{\tilde{u}}'_t,$$

où $\tilde{\tilde{u}}''_t$ représente le stock, et en remplaçant une des équations déjà présentée ;

b) une équation indiquant l'influence du stock sur d'autres variables, par exemple

$$p_t = \pi_u u_{t-[9]} - \pi''_u \tilde{\tilde{u}}''_{t-[9']}.$$

Il y a encore d'autres considérations qui peuvent nous retenir. Du moment qu'on renonce à l'hypothèse de stocks abondants, il faut tenir compte du fait que les stocks ne deviennent jamais négatifs. Certaines « tensions » apparaissent dans le système des relations dès que les stocks s'approchent de zéro. Ces tensions amènent les changements nécessaires à empêcher la disparition des stocks. Un exemple s'en retrouve dans l'équation (3) pour u'_t. La valeur résultant de cette équation doit être amendée quand $\bar{u}' + u'_t$ surpasse le stock disponible. En réalité cela se fait par un simple rationnement dans certains cas ou par une hausse des prix, telle que la quantité demandée ne surpasse guère le stock disponible. Il s'ensuit que l'équation du prix ne sera plus remplie dans ce cas ; il est même possible que l'équation

$$p_t = \pi_u u'_{t-3} - \pi''_u \tilde{\tilde{u}}''_{t-1},$$

introduite plus haut, ne sera pas exacte non plus ; on aura, par exemple,

$$p_t = \pi_u u'_{t-3} + \frac{\pi_u}{\tilde{u}''_{t-1} + u''_0}.$$

Du point de vue mathématique, une telle relation rend beaucoup plus compliquée la solution du système d'équations, en raison de l'absence de linéarité. Comme nous l'avons démontré aux paragraphes 7 et 9, cette circonstance introduit de nouveaux types de mouvements.

Cependant, dans de tels cas, on peut choisir une autre approximation mathématique de ces relations. On peut énoncer que la formule déterminant u'_t, c'est-à-dire la formule (3), ne vaut que pour des stocks suffisants. Dès qu'il n'en est plus ainsi, cette dernière formule est remplacée par

$$u'_t = \tilde{u}''_{t-1}.$$

Voici la conséquence que l'on en peut tirer : le système économique commence par décrire le mouvement donné par le système primitif d'équations ; aussitôt que les stocks sont épuisés, le système donne naissance à une autre courbe.

18. Introduction d'autres relations ; variables « adiabatiques ».

Une deuxième manière de généraliser le système d'équations consiste à introduire d'autres relations entre les variables considérées. Une forme spéciale de changement des relations est donnée par la considération des « *retards distribués* » (*distributed lags*), expression due à M. Irving Fisher (1). Cela veut dire, par exemple, que les investissements ne sont pas seulement liés aux profits d'il y a quatre mois, mais aussi à ceux d'il y a six mois, d'il y a cinq mois, etc.... On aura alors

$$\bar{b}l_t + \bar{l}b_t = \alpha_6 Z_{t-6} + \alpha_5 Z_{t-5} + \ldots + \alpha_0 Z_t - \beta m_{t-4},$$

où, d'ailleurs, le dernier terme pourrait constituer lui-même une série analogue de termes. Les coefficients α_i se répartiront peut-être

(1) Voir par exemple, *Theory of Interest*, 1930.

suivant une distribution à peu près normale. Il est clair que l'introduction de ces retards distribués augmentera le nombre de termes de l'équation finale, en faisant apparaître un retard différent. Cette circonstance a pour effet de niveler plus ou moins les termes consécutifs dans l'équation finale.

Nous évoquerons également une méthode générale propre à déceler l'influence d'un tel nivellement des coefficients sur la valeur des racines de l'équation caractéristique. Il est évident, cependant, que la nouvelle équation aura, en général, moins de racines réelles et positives. Le nivellement des coefficients de l'équation finale a pour résultat de réduire le nombre des changements de signe de ces coefficients et puisque des racines positives ne sont compatibles qu'avec un tel changement de signe, ces racines tendent à s'évanouir.

En réalité la plupart des *retards* seront des *retards distribués*. On est ainsi amené à songer à l'existence d'un trop grand nombre de racines positives dans les exemples schématisés, où l'on n'a pas introduit assez de retards distribués. Il est probable que ces racines sont sans signification réelle, surtout quand elles possèdent un module assez élevé.

Ces considérations nous conduisent à une autre généralisation du système d'équations, *propre à manier davantage la subdivision du temps*. Elle nous fournit le moyen de parvenir à une meilleure approximation de la valeur réelle des décalages. La conséquence en est que le degré de l'équation caractéristique devient plus élevé. Quand, par exemple, notre système est caractérisé, entre autres, par deux périodes de décalage, l'une de 1,2 mois et l'autre de 1,4 mois, on obtiendra une équation du 7e degré au moins, tandis qu'une approximation n'utilisant que des périodes élémentaires d'un mois, fournira peut-être une équation du second degré tout au plus.

Quand, cependant, on pousse la subdivision du temps, en introduisant des unités de 0,1 mois par exemple, au lieu d'un mois, toutes choses égales d'ailleurs, on aboutit exactement aux mêmes solutions. On obtient dans ce cas comme équation caractéristique

$$y^{20} + ay^{10} + b = 0,$$

au lieu de

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Cela équivaut à une transformation de x en y^{10}. L'unité de temps étant dix fois plus petite, les solutions fournissent maintenant des périodes dix fois plus grandes (1).

Une autre question se pose lorsqu'on se demande *quelle est l'influence de l'introduction de petits termes d'une période de décalage plus grande que celles inclues jusqu'ici.* Cela signifie que dans l'équation finale un terme s'ajoute, correspondant à une période plus éloignée de celle du dernier terme. Au lieu de l'équation

$$u_1 + a_1 u_{t-1} + a_2 u_{t-2} + \ldots + a_n u_{t-n} = 0,$$

on aura

$$u_t + a_1 u_{t-1} + \ldots + a_n'' u_{t-n} + a_{n+m}\, u_{t-m-n} = 0.$$

Ses équations caractéristiques sont

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

et

$$f'(x) = x^{m+n} + a_1 x^{m+n-1} + a_2 x^{m+n-2} + \ldots + a_n x^m + a_{n+m} = 0$$

Supposant que a_{n+m} est petit en comparaison de $a_1, \ldots, a_n$, on pourra écrire

$$f'(x) \sim x^m f(x),$$

d'où l'on voit que $f'(x)$ aura m racines de plus que $f(x)$ et que ces racines seront voisines de zéro. Il s'en suit que l'omission du terme $a_{n+m} u_{t-m-n}$, dans l'équation finale, n'altèrera pas grandement les mouvements du système. Il est donc permis de négliger de tels termes, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises.

D'autre part, il est des simplifications de nature économique dans notre système d'équations. C'est elles qui vont nous retenir maintenant. L'introduction d'autres relations alors se présente sous un aspect tout à fait différent. Il se peut que nous soyons obligés de modifier radicalement l'une des équations de notre exemple central, correspondant mal aux conditions réelles. Par exemple, nous avons supposé que la grandeur de la production de

(1) D'ailleurs l'équation en y possède 18 autres racines qui cependant correspondront, dans la plupart des cas, à des périodes très courtes sans intérêt pour nos problèmes.

biens de consommation est basée principalement sur les ventes. On pourrait croire au contraire que le volume de la production est basé sur d'autres indices, tel que la marge du profit. Alors l'équation (8) du système original se modifie en

$$u_t = \alpha'' z_{t-1}, \quad z_t = p_t - l_t.$$

Il va sans dire qu'une équation plus générale à deux termes peut être adoptée

$$u_t = \alpha'' z_{t-1} + \alpha''' u'_t.$$

Elle exprime que les entreprises ou industries déterminent leur production soit d'après la marge, soit d'après les ventes, soit d'après ces deux facteurs à la fois. L'expérience décide laquelle de ces hypothèses est la bonne. Il est assez difficile de procéder à un contrôle statistique. Sans doute constitue-t-il un des points du programme des recherches statistiques à venir.

A cet exemple, on pourrait en joindre bien d'autres. Nous renvoyons aux discussions qui ont été développées à propos de la formation des salaires (1).

Un troisième type de généralisation est fourni par l'abandon de l'hypothèse de la stricte constance des valeurs d'équilibre (voir le paragraphe 3). Nos formules du mouvement restent valables avec assez d'exactitude au cas où ces valeurs présentent des variations lentes, c'est-à-dire des variations qui sont minimes comparées aux fluctuations des variables. C'est là également une généralisation importante, puisque la réalité ne correspond guère à des valeurs d'équilibre absolument constantes. Nos formules gardent leur valeur, même dans le cas où, étant donné la linéarité des équations, on substitue aux valeurs d'équilibre les valeurs correspondantes à une solution spéciale du système. Cette remarque est particulièrement importante lorsqu'on choisit une solution donnant un mouvement lent, soit un mouvement de période très longue et d'amplitude restreinte, soit un mouvement monotone et lent. Ce mouvement peut alors être considéré, ainsi que nous l'avons déjà observé, comme une généralisation de la notion d'état d'équilibre, appelons-le *mouvement d'équilibre*. Il a la propriété de ne pas montrer de recul sérieux.

---

(1) Voir par exemple notre article intitulé « Annual Survey : Suggestions on Quantitative Business Cycle Theory », *Econometrica*, III, 1935, p. 241.

D. — AUTRES MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'APPROXIMATION

19. Méthode de l'équation différentielle et méthode de la réduction du nombre des termes.

A côté de la méthode employée plus haut pour interpréter le mouvement du système, il y en a d'autres.

Nous traiterons ici de quelques-unes d'entre elles. La première peut être appelée *méthode de l'équation différentielle.* Elle consiste en ceci : on rapporte au même instant tous les termes de l'équation à l'aide de la formule

$$f(t-\theta) = f(t) - \theta f'(t) + \frac{\theta^2}{2!} f''(t) + \dots \tag{19.1}$$

Suivant qu'on arrête le développement à un nombre restreint ou à un nombre plus élevé de termes, on obtient une équation différentielle d'ordre plus ou moins élevé, et une approximation plus grossière ou plus serrée. Cette approximation sera acceptable dans l'étude des mouvements à long terme, plutôt que dans celle des cycles courts, puisqu'on atteindra rapidement dans le dernier cas, la limite de validité de l'approximation. On pourrait faire usage de cette méthode dans l'étude des mouvements d'équilibre.

La deuxième méthode d'approximation à discuter pourra s'appeler la *méthode de la réduction du nombre de termes.* Elle conserve le caractère primitif de l'équation, c'est-à-dire celui d'une équation aux différences finies, mais elle réduit le nombre des termes par la transformation

$$f(t+\theta) = \frac{1}{2}\Big[f(t) + f(t+2\theta)\Big], \tag{19.2}$$

ou bien par la transformation

$$f(t+k\theta) = \frac{1}{n}\Big[(n-k)f(t) + kf(t+n\theta)\Big]. \tag{19.3}$$

Par l'application de la formule (19.2), on peut par exemple éliminer tous les termes d'ordre impair et réduire le nombre de termes à la

moitié ; par la formule (19.3), on réduit ce nombre à $\frac{1}{n}$ du nombre initial. Il va sans dire que cette méthode comporte également certaines limites d'application ; elle aussi ne s'emploie que pour les mouvements lents. Il est probable cependant qu'elle s'applique à un intervalle plus étendu que la première méthode. L'avantage consiste en ce qu'on obtient comme équation caractéristique une équation de degré inférieur à celui de l'équation caractéristique primitive. D'autre part, on simplifie un peu trop le système des mouvements possibles parce qu'on « obscurcit » quelques racines de l'équation finale. A ces racines ne correspondent cependant que des mouvements à période très courte.

Il est évident qu'en général les limites d'application de cette méthode se restreignent quand on réduit de deux seulement le nombre de termes de l'équation finale. Dans ce cas, l'équation caractéristique est linéaire et le système ainsi simplifié ne peut décrire que deux sortes de mouvements : *a*) des mouvements exponentiels, et, *b*) des mouvements cycliques d'une période de deux unités seulement. La possibilité des mouvements cycliques à période plus longue est exclue *a priori*, ce qui comporte une simplification beaucoup trop grande du système.

20. Méthode de l'équation intégrale ; équations mixtes.

La troisième méthode d'approximation est appelée « *méthode de l'équation intégrale* ». Ici on suppose que le nombre de termes dans l'équation finale devient infini. C'est spécialement dans le cas des « retards distribués » (voir paragraphe 18) que cette supposition semble légitime. On peut alors écrire

$$(20.1)\qquad \int_{t-T}^{t} f(t-\tau)e^{z\tau}d\tau = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{T} f(\tau')e^{z(t-\tau')}d\tau' = 0$$

où on met $f(\tau')$ pour le coefficient du terme correspondant au moment τ', et T pour le retard maximum jouant quelque rôle.

Nous montrerons avec plus de détails, les avantages de cette méthode. Choisissons d'abord l'unité de temps telle que $T = 2\pi$ et développons la fonction $f(\tau')e^{\alpha\tau'}$ en série de Fourier

$$(20.2)\qquad f(\tau')e^{\alpha\tau'} = A_0 + \sum_1^k A_k \cos k\tau' + \sum_1^k B_k \sin k\tau'.$$

Il suit que

$$f(\tau') = e^{-\alpha\tau'}\left(A_0 + \sum^k A_k \cos k\tau' + \sum^k B_k \sin k\tau'\right).$$

Nous transformons

$$(20.3) \qquad A_k \cos k\tau' + B_k \sin k\tau' = \frac{1}{2}A_k\left(e^{ik\tau'} + e^{-ik\tau'}\right) + \frac{1}{2i}B_k\left(e^{ik\tau'} - e^{-ik\tau'}\right) = C_k e^{ik\tau'} + D_k e^{-ik\tau'},$$

où

$$C_k = \frac{1}{2}\left(A_k - iB_k\right), \qquad D_k = \frac{1}{2}\left(A_k + iB_k\right).$$

L'équation (20.1) prend la forme

$$\int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau'}\left(A_0 + \sum_1^k C_k e^{ik\tau'} + \sum_1^k D_k e^{-ik\tau'}\right) e^{z(t-\tau')} d\tau' = 0.$$

Après division par e^{zt}, on obtient

$$A_0 \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau' - z\tau'} d\tau' + \sum_1^k C_k \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau' + ik\tau' - z\tau'} d\tau' + \sum_1^k D_k \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau' - ik\tau' - z\tau'} d\tau' = 0.$$

Effectuant l'intégration, on a

$$\frac{A_0}{\alpha + z}\left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right] + \sum_1 k \frac{C_k}{\alpha + z - i}\left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right] + \sum k \frac{D_k}{\alpha + z - i}\left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right] = 0.$$

$$(20.4) \qquad \left[e^{-(\alpha+z)2\pi} - 1\right]\left(\frac{A_0}{\alpha + z} + \sum_1 k \frac{C_k}{\alpha + z - i} + \sum_1 k \frac{D_k}{\alpha + z + i}\right) = 0.$$

On le voit, il y a deux groupes de racines :

1° celles de l'équation

$$e^{-2\pi(\alpha+z)} = 1$$

c'est-à-dire $\alpha + z = 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ etc.

2° celles de l'équation

$$(20.5)\qquad \frac{A_0}{\alpha + z} + \sum_1^k \frac{C_k}{\alpha + z - i} + \sum_1^k \frac{D_k}{\alpha + z + i} = 0$$

La première famille de racines donne les solutions

$$e^{-\alpha t},\ e^{-\alpha + it},\ e^{-\alpha + 2it},\ e^{-\alpha + 3it},\ \text{etc.}$$

c'est-à-dire des mouvements présentant tous le même degré d'amortissement et dont le premier terme est monotone, tandis que les autres possèdent des périodes de 2π, de π, de $\frac{2\pi}{3}$, de $\frac{\pi}{4}$ etc. Ce sont des périodes courtes. Dans l'exemple central T étant de 8 mois, ces périodes ne sont guère intéressantes. Or, ce cas se présente, quand $C_k = D_k = 0$, les coefficients sont alors tous positifs et s'évanouissent comme une série convergente géométrique. Figurons-nous maintenant que nous approchions la forme réelle de $f(\tau)$ par l'addition successive de coefficients C et D et commençons par ajouter seuls C_1 et D_1. Il y aura maintenant une deuxième famille de racines, satisfaisant à l'équation

$$\frac{A_0}{\alpha + z} + \frac{C_1}{\alpha + z - i} + \frac{D_1}{\alpha + z + i} = 0.$$

En écrivant c_1 pour $\frac{C_1}{A_0}$ et d_1 pour $\frac{D_1}{A_0}$, nous aurons

$$(\alpha + z)^2 + 1 + (\alpha + z)\left[c_1(\alpha + z + i) + d_1(\alpha + z - i)\right] = 0.$$

Il est utile de remplacer c_1 et d_1 par a_1 et b_1, où $a_1 = \frac{A_1}{A_0}$ et $b_1 = \frac{B_1}{A_0}$; on obtient

$$(\alpha + z)^2 + 1 + \frac{1}{2}(\alpha + z)\Big[(a_1 - b_1 i)(\alpha + z + i) + (a_1 + b_1 i)(\alpha + z - i)\Big] = 0$$

$$(\alpha + z)^2 + 1 + (\alpha + z)\left[a_1(\alpha + z) + b_1\right] = 0$$

$$(1 + a_1)(\alpha + z)^2 + b_1(\alpha + z) + 1 = 0$$

$$\alpha + z = -\frac{b_1}{2(1 + a_1)} \pm \frac{1}{2(1 + a_1)}\sqrt{b_1^2 - 4(1 + a_1)}$$

$$z = -\frac{b_1}{2(1 + a_1)} \pm \frac{i}{2(1 + a_1)}\sqrt{4(1 + a_1) - b_1^2}$$

On en déduit les propositions suivantes :

1° Ces solutions donnent lieu à des mouvements monotones, si $b_1^2 > 4(1 + a_1)$;

2° Elles indiquent des mouvements à longues périodes si

$$b_1^2 < 4(1 + a) \quad \text{et} \quad 4(1 + a_1) - b_1^2 \ll 4(1 + a_1)^2 ;$$

3° Les périodes deviennent courtes, si $4(1 + a_1) - b_1^2$ est voisin de ou dépasse $4(1 + a_1)^2$;

4° Le degré d'amortissement augmente avec $\dfrac{b_1}{2(1 + a_1)}$.

L'importance de cette méthode nous semble résider en ce qu'elle permet d'analyser l'influence de l'introduction des décalages distribués comme ils ont été considérés plus haut (Paragraphe 18). En effet, l'introduction des « décalages distribués » signifie qu'on effectue un certain nivellement des coefficients successifs de l'équation finale, c'est-à-dire qu'on rend plus monotone la fonction $f(\tau')$. Cela veut donc dire qu'on réduit l'amplitude des termes à haute fréquence dans la série de Fourier. Conséquemment, on obtient une équation (20.5) ayant moins de termes C_k et D_k.

La structure de notre exemple central est trop simple pour une application de ces idées. Il sera utile d'attendre, pour une application, jusqu'à ce qu'on ait analysé avec plus de précision les phénomènes économiques.

Équations mixtes. — Il va sans dire qu'il est également possible de décrire les systèmes économiques avec des équations mixtes (équations intégro-différentielles, équations différentielles et à différences, etc.). Dans certaines circonstances, c'est la méthode la plus simple. Il paraît difficile d'affirmer cependant, que la nature des problèmes conduit à ce type d'équation. L'emploi d'intégrales et de dérivées ne semble pas nécessairement refléter la vraie nature des choses, mais plutôt une approximation convenable ; de sorte que les équations aux différences, que nous avons utilisées, sont en principe les plus fidèles à représenter les systèmes économiques.