EERSTE GEDEELTE.

DE BESCHRIJVING DER ECONOMISCHE VERSCHIJNSELEN.

HOOFDSTUK I.

UIT DE VORMLEER DER BEWEGINGEN.

A. De enkelvoudige vormen der bewegingen.

1. De taak der economische bewegingsleer is de beschrijving en de verklaring der bewegingen in de economische grootheden. In dit eerste deel onzer beschouwingen zullen wij ons bepalen tot de *beschrijving*. Zodanige beschrijving kan verreweg het doelmatigst geschieden met behulp van grafische voorstellingen, waarbij de bewegingen (ook wel veranderingen genoemd) door bepaalde meetkundige figuren worden voorgesteld. En tot goed begrip van de verschillende typen van bewegingen is een zeker minimum aan meetkundige beschouwingen over deze figuren, geheel los van de aard der voor te stellen economische verschijnselen, gewenst. Met deze meetkundige beschouwingen beginnen wij.

Bij de verklaring van de bewegingen van economische grootheden zal het vaak nodig zijn de samenhang van de bewegingen in de ene grootheid met die van andere grootheden te bestuderen. Alvorens deze te beschouwen is het echter gewenst, eerst de bewegingen der afzonderlijke grootheden te beschrijven. Deze bewegingen zijn veelal vrij gecompliceerd. Het heeft dan ook een zeker nut om ze te splitsen in *componenten* van eenvoudiger aard, die wij enkelvoudige bewegingen zullen noemen. Hieraan geven wij allereerst aandacht.

a. Systematische en toevallige bewegingen.

2. In de eerste plaats moet onderscheid gemaakt worden tussen de hierboven genoemde typen van bewegingen. Bij systematische bewegingen is er systeem in de wijze waarop de getallen die de grootheid meten op elkaar volgen. Toevallige bewegingen daartegenover zijn bewegingen waarbij in de opeenvolging elk systeem ontbreekt (vgl. ook hoofdstuk VI). De twee typen laten zich reeds onderscheiden in het zeer vereenvoudigde geval dat de grootheid in kwestie

slechts twee waarden kan aannemen; zeggen wij bv. 0 en 1. Systematische bewegingen zijn bv. die van de cijferreeksen:

0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, enz.
0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, enz.

Er is uiteraard een onbeperkte hoeveelheid systematische bewegingen mogelijk, aangezien men, desgewenst, steeds ingewikkelder systeem in de opeenvolging zou kunnen leggen. Het kenmerk van een toevallige beweging is, dat elk zodanig systeem in de opeenvolging ontbreekt. Een zodanige beweging zal bv. optreden, wanneer men met een munt het volgende dobbelspel speelt: komt munt boven, dan telt men dat voor 1; komt kruis boven, dan telt men dat voor 0. Door het spel eindeloos te herhalen, zal men een toevallige beweging kunnen verkrijgen. De variabele grootheid of kortweg variabele die een zodanige beweging vertoont noemt men ook wel een „*toevallige variabele*". Deze benaming gebruikt men ook wel in een beperktere zin. Een *toevallige variabele in de beperktere zin* voldoet aan twee eisen, nl. (1) aan de bovengenoemde eis van de afwezigheid van enig systeem in de opeenvolging der waarden en daarnaast aan de eis dat (2) de frequentieverdeling der verschillende waarden aan de wet van Gauss voldoet. De wet van Gauss of van Quetelet, ook wel de normale verdelingswet of normale foutenwet genoemd, wordt door een wiskundig verband gekenmerkt, waarvan de grafische voorstelling een bepaalde klokvormige curve is. Zij brengt dus o.m. mede, dat er alle mogelijke waarden kunnen voorkomen en niet slechts, als in bovenstaand voorbeeld, alleen de getallen 0 en 1 en voorts, dat er relatief veel kleinere afwijkingen en relatief weinig grotere afwijkingen van het gemiddelde voorkomen.

Een zodanige toevallige variabele in de beperktere zin kan men verkrijgen bij meer ingewikkelde kansspelen, waarbij het aantal verschillende uitkomsten groter (in principe wanneer het oneindig groot) is. Zou men bv. niet met 1 munt werpen, maar met 100, en telken male het aantal munten dat de muntzijde boven keert als „resultaat" van de worp beschouwen, dan zou dit resultaat reeds zeer dicht een toevallige variabele in de beperktere zin benaderen. In het algemeen zal een grootheid dit karakter vertonen, wanneer zijn waarden het resultaat zijn van de optelling van een groot aantal toevallige variabelen van de eerste soort, die van elkaar onafhankelijk zijn. In gewo-

nere taal uitgedrukt zal een variabele zulke bewegingen vertonen, wanneer er vele van elkaar onafhankelijke oorzaken van variatie kunnen optreden.

b. Eenzijdige en periodieke bewegingen.

3. De systematische bewegingen laten zich in zeer uiteenlopende typen onderscheiden. Voor ons doel heeft het geen zin, deze typen op de wijze van de nauwkeuriger wiskundige behandeling te onderscheiden. Daartoe zij verwezen naar de leerboeken over functies en over analytische meetkunde. Een enkele onderscheiding is echter van bijzonder belang, nl. die in *eenzijdige* en *periodieke* bewegingen. Een eenzijdige beweging keert nooit terug tot haar uitgangspunt; elke volgende waarde is of niet kleiner of niet groter dan de voorafgaande. In het eerste geval hebben wij met een monotoon stijgende, in het tweede geval met een monotoon dalende beweging te maken. Bij een periodieke beweging daarentegen herhaalt na een zeker tijdsverloop de beweging zich. Bedoeld tijdsverloop wordt de *periode* genoemd. Wij zullen de definitie zelfs nog iets ruimer kiezen en tot de periodieke bewegingen eveneens rekenen de niet-monotone bewegingen die zich wel niet zuiver herhalen na een vaste tijd, doch die zich na zodanig tijdsverloop herhalen in $a \times$ vergrote vorm. Als voorbeeld van de eerste soort, de zuiver periodieke beweging, vermelden wij:

4, 8, 12, 4, 8, 12, 4, 8, 12 enz.

Als voorbeeld van de tweede soort:

4, 8, 12, 2, 4, 6, 1, 2, 3 enz.

In beide gevallen is de periode gelijk aan 3 tijdseenheden; in het tweede geval herhaalt zich de beweging op halve schaal; $a = \frac{1}{2}$.

Enkele zeer eenvoudige meer speciale typen van de twee bewegingsvormen, zojuist onderscheiden, zullen wij nog nader bezien.

Voorbeelden van monotone bewegingen zijn in de eerste plaats bewegingen volgens een *rechte lijn*. Deze kan zowel stijgend als dalend zijn, terwijl de horizontale rechte lijn de overgang vormt. Bij een rechte lijn is het hoogteverschil tussen twee opeenvolgende tijdseenheden (jaren, kwartalen, maanden) steeds even groot. Wij zullen dit verschil wel aanduiden als helling, snelheid of stijgingstempo. (Naar wiskundig gebruik zullen wij vaak, als wij over stijging spreken,

daaronder ook het begrip daling — d.i. negatieve stijging — begrijpen.) Het stijgingstempo is dus constant bij een rechte lijn.

Een tweede belangrijk voorbeeld van een monotone beweging is die volgens een zgn. *exponentiële curve*. Deze heeft de eigenschap, dat de hoogten van een willekeurige serie achtereenvolgende, op gelijke afstanden gekozen, tijdstippen, een meetkundige reeks vormen. D.w.z. telkens als het tijdstip een even groot bedrag verder wordt gekozen wordt de hoogte van de curve met hetzelfde bedrag vermenigvuldigd. Een exponentiële curve is dus bv. (fig. 1):

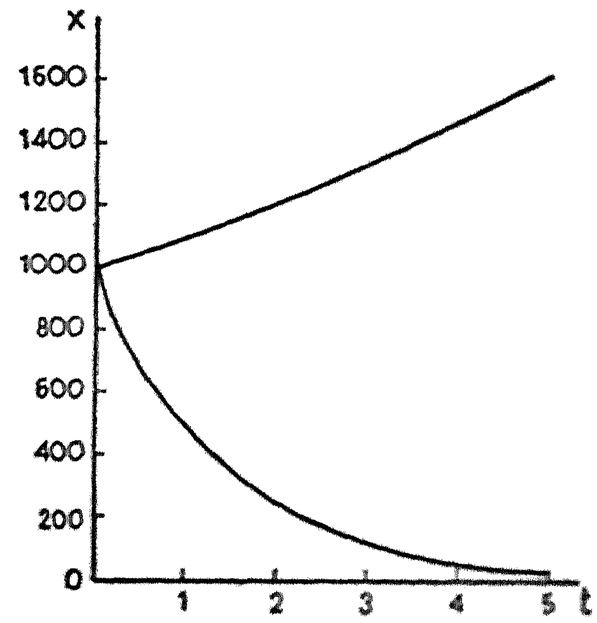

Fig. 1. Exponentiële curven.

tijdstip $t =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
hoogte $x =$ 1000, 1100, 1210, 1331, 1464,1 1610,51 ...

Deze is stijgend. Een dalende is bv.:

$t =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5,
$x =$ 1000, 500, 250, 125, 62,5 31,25

De helling of het stijgingstempo is nu niet langer constant. Het is evenredig met de eenmaal bereikte hoogte. Men zegt ook wel dat het relatieve stijgingstempo constant is.

Er zijn nog een aantal andere belangrijke curven die monotone bewegingen afbeelden. Zij zijn niet zonder wiskundige formules te behandelen. Wij noemen nog de p a r a b o l e n van verschillende graad, die door formules van de vorm $x = at^n$ worden voorgesteld, waarbij n de graad is. Deze zijn monotoon voor $t > 0$. Daarnaast is van groot belang de zgn. l o g i s t i s c h e of groeicurve:

$$x = \frac{k}{a + b^{-t}}$$

De *groeicurve*, waarvan fig. 2 een afbeelding geeft, ontstaat, wanneer een bevolking groeit volgens de wet, dat de aangroeiing per tijdseenheid evenredig is met:

a. de reeds bereikte grootte van die bevolking en

b. de grootte van de bevolking waarvoor nog, boven de reeds aanwezige bevolking, onderhoudsmiddelen beschikbaar zijn. De totale

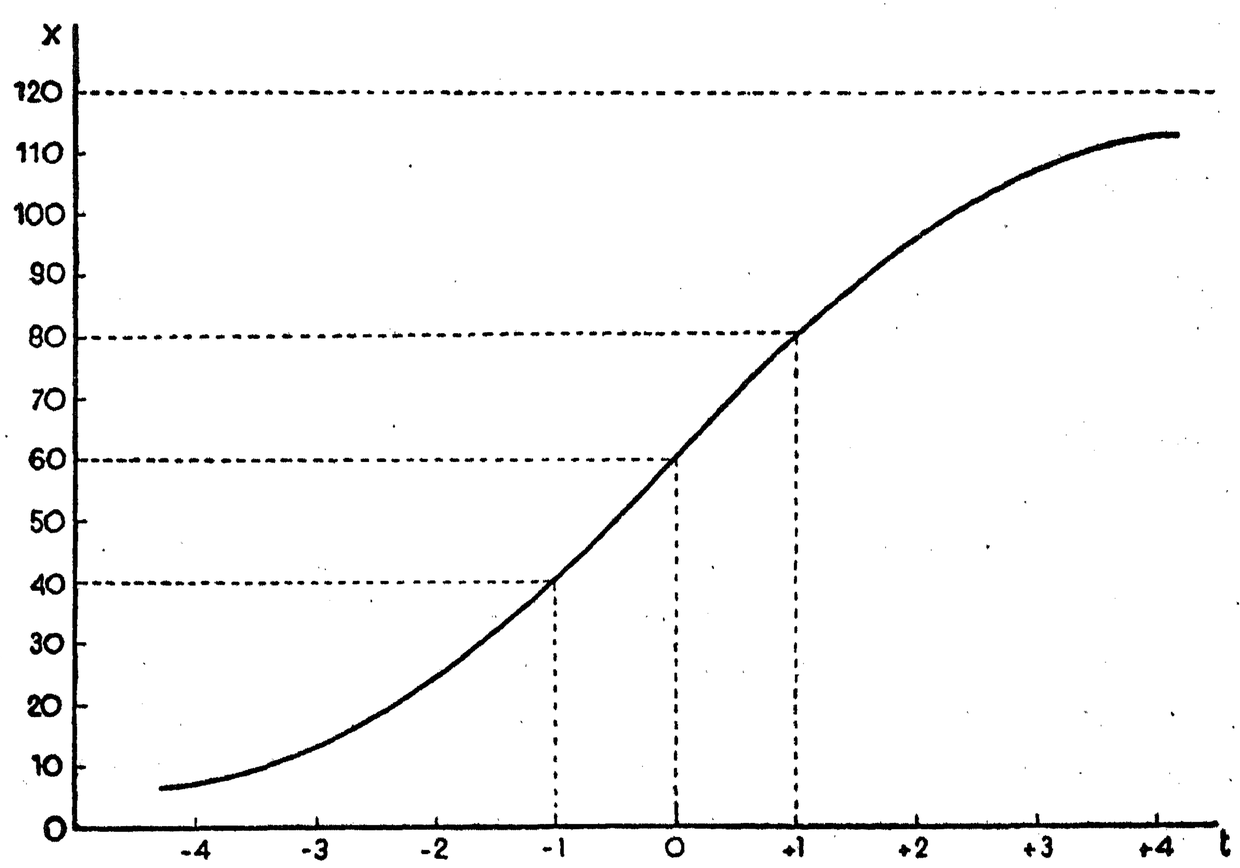

Fig. 2. Logistische of groeicurve (a = 1, b = 2, k = 120).

hoeveelheid onderhoudsmiddelen wordt verondersteld zodanig te zijn, dat een bevolking van constante grootte er van leven kan.

Tot de monotone bewegingen rekenen wij ook bewegingen die niet over de gehele tijdsduur door eenzelfde mathematische curve worden voorgesteld, doch bv. eerst door een stijgende rechte lijn en na een zekere tijd door een horizontale.

Een zeer eenvoudig type van een *periodieke* beweging wordt afgebeeld door de *sinuscurve* of *sinusoide*, waarvan fig. 3 een afbeelding geeft. Zij geeft o.m. de hoogte weer van een punt dat zich in de loop van de tijd met constante snelheid langs een cirkelomtrek beweegt, zoals uit fig. 3 ook te zien is. Wij deelden reeds mede, dat men de afstand A B de periode noemt; C D en E F zijn daaraan eveneens gelijk. De halve afstand A G heet de *amplitude*.

Wij zullen vaak te doen hebben met bewegingen, die niet nauw-

keurig, maar wel bij benadering een periodiek karakter hebben. D.w.z. dat zich de bewegingen ongeveer herhalen na ongeveer eenzelfde tijd. Wij zullen zulke bewegingen vaak aanduiden als schommelende be-

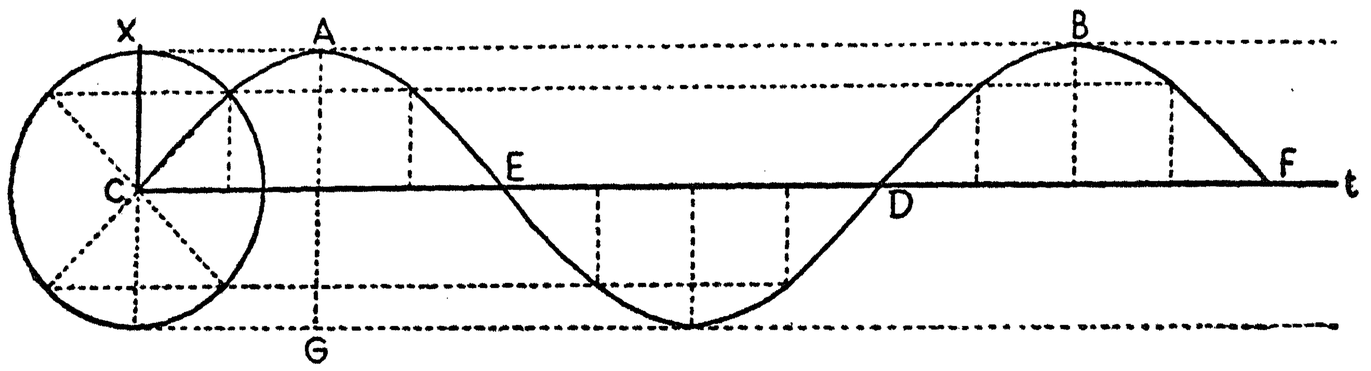

Fig. 3. Sinuscurve of sinusoide (C A E D B F ..), aangevende de hoogte van een punt dat zich met constante snelheid langs een cirkel beweegt.

wegingen, als *schommelingen* of als *golven*. Wij kunnen ook spreken van quasi-periodieke bewegingen. Een vermeldenswaardig voorbeeld van quasi-periodieke bewegingen zijn de toevallige bewegingen. Het laat zich bewijzen, dat de quasi-periode dezer bewegingen drie tijdseenheden is. Dit moet men aldus opvatten, dat er gemiddeld eenmaal op de drie keren een top en eveneens gemiddeld eenmaal op de drie keren een dal optreedt. Als tijdseenheid moet men de afstand tussen twee opeenvolgende onafhankelijke getallen beschouwen.

c. Gedempte, ongedempte en antigedempte bewegingen.

4. Wij zeiden reeds, dat wij ook tot de periodieke bewegingen rekenen niet-monotone bewegingen die zich herhalen op steeds kleiner of groter schaal. Geschiedt de herhaling op steeds kleiner schaal — d.w.z. is de factor a, genoemd in § 3, kleiner dan 1 —, dan noemen wij die beweging gedempt. De *dempingsverhouding* wordt door het getal $\frac{1}{a}$ aangegeven. Is daarentegen $a > 1$, dan vertoont de beweging anti-demping. Men spreekt dan ook wel eens van „explosieve" bewegingen. De zuiver periodieke beweging is ongedempt.

Er is aanleiding om dezelfde onderscheiding in te voeren bij de exponentiële bewegingen. Wanneer daar de verhouding tussen twee opeenvolgende waarden kleiner dan 1 is, zullen wij de beweging gedempt noemen; is die verhouding groter dan 1, dan bezit zij antidemping.

B. De componenten der samengestelde bewegingen.

5. De bewegingen van de meeste economische verschijnselen zijn gecompliceerder dan elk der enkelvoudige bewegingsvormen, in het voorafgaande besproken. Zij kunnen echter wel opgevat worden als combinaties van benaderingen dezer bewegingsvormen. *Benaderingen*: want voorzover bv. periodieke bewegingen in de realiteit worden aangetroffen zijn deze veelal geenszins zuiver periodiek. De vorm der bewegingen in de afzonderlijke perioden keert vaak slechts ongeveer terug; in andere gevallen is de periode die men meent te kunnen onderscheiden geenszins constant. *Combinaties* van benaderingen: wij gebruiken het in wiskundige zin vage woord „combinaties", omdat het hierbij soms gaat om de som van enkelvoudige bewegingen, soms om het product en soms om nog ingewikkelder combinaties. Hoofdzaak is dat de reële beweging in elk dezer gevallen is „op te bouwen uit" de enkelvoudige bewegingen.

In het bijzonder bij het statistisch conjunctuuronderzoek heeft zich de gewoonte sterk ingeburgerd, de in de werkelijkheid optredende bewegingen in dergelijke enkelvoudige componenten te splitsen en deze componenten nader te bestuderen. In verschillende opzichten is dit een doelmatige werkwijze; in andere opzichten zijn er bezwaren tegen in te brengen. Wij zullen op deze punten ingaan, nadat wij de details van de splitsing in componenten wat meer hebben bekeken.

De gebruikelijke splitsing is er een in vier componenten, die meestal op de volgende wijze worden aangeduid:

a. de *trend*component, weergevende de algemene tendentie van de beweging en als regel voorgesteld door een eenzijdige beweging;

b. de *conjunctuur*component, bestaande uit schommelingen van een periode van tussen de drie en elf jaar;

c. de *seizoen*component, bestaande uit schommelingen met een periode van een jaar, toe te schrijven aan de wisselingen, gedurende het jaar, van het natuurlijke zowel als van het conventionele seizoen en tenslotte

d. de *onregelmatige* component, waarin zowel worden ondergebracht eenmaal optredende wijzigingen (zoals plotselinge niveauveranderingen door „structuurbreuken") als ook de aan toevallige oorzaken toe te schrijven afwijkingen, welke meestal van zeer korte duur zijn (quasi-schommelingen van b.v. drie maanden).

Dit indelingsschema worde in de praktijk niet al te mechanisch toegepast, daar er verschillende uitzonderingen zijn op de regel dat deze vier componenten in de meeste economische reeksen zijn aan te treffen. Wij willen eerst enkele dezer uitzonderingen noemen en eerst daarna een systematische beschouwing over het onderwerp geven.

Er komen schommelingen voor met een periode van langer dan elf jaar. Daartoe moeten zowel de zgn. lange golven van de conjunctuur (zie hoofdstuk IV) als de schommelingen van enige afzonderlijke markten (zie hoofdstuk VIII) worden gerekend. Al naar de aard van het beschouwde vraagstuk en de behandelde periode deelt men deze in bij b. of bij a., waardoor a. niet altijd door een monotone beweging wordt vertegenwoordigd.

Er komen voorts schommelingen voor, die naar hun aard met seizoenschommelingen moeten worden gelijkgesteld, doch een kortere periode hebben, nl. een van drie maanden, van een maand, een week of een dag (zie hoofdstuk V). Daartegenover staat, dat de toevallige bewegingen soms quasi-perioden te zien geven, die aanzienlijk langer zijn dan drie maanden. Bij de wisselingen der oogsten, die zeker in hoge mate als toevallig kunnen worden beschouwd, is de afstand tussen twee opeenvolgende onafhankelijke waarden een jaar, waardoor quasi-perioden van drie jaar ontstaan kunnen. Door deze beide omstandigheden is het vaak moeilijk om de componenten c. en d. of zelfs b. en d. streng van elkaar te scheiden.

Bezien wij thans nader de bedoelingen van de gebruikelijke indeling, dan bespeuren wij daarin een indeling naar verschillende gezichtspunten dooreen. Het meest op de voorgrond staat een indeling naar de lengte van de perioden der schommelingen. Men kan zeggen dat als regel de schommelingen met een periode van langer dan 11 jaar in de trendcomponent worden opgenomen, waarbij de eenzijdige bewegingen kunnen worden opgevat als onderdelen van zeer lange periodieke bewegingen of zelfs bewegingen met een oneindig lange periode. De bewegingen met perioden van tussen de 1 en 11 jaar vallen onder de conjunctuurcomponent; die van 1 jaar onder de seizoencomponent en die van korter dan een jaar onder de onregelmatige bewegingen. Wij hebben reeds gezien, dat men daarmede de werkelijkheid echter soms geweld aandoet.

Men vindt in de gebruikelijke indeling echter ook het gezichtspunt

van de splitsing in toevallige en systematische bewegingen terug, dat wij in § 1 bespraken.

En tenslotte is er een streven merkbaar naar een indeling der bewegingen naar oorzaken. In het bijzonder het afzonderlijk noemen van de seizoenbewegingen is hiervan een uitvloeisel, doch evenzeer het afzonderlijk houden van de trendbeweging. Deze toch wordt vaak toegeschreven — in verschillende gevallen terecht — aan de wijzigingen in bepaalde data, die zich langzaam veranderen, zoals de bevolkingsomvang, de stand van de techniek, e.d.

De juiste splitsingswijze kan ons slechts de volledige theorie van de economische bewegingen leren. Daarom kan er in dit stadium onzer beschouwingen slechts sprake zijn van een voorlopig hulpmiddel. Over de theorie zullen wij in het tweede gedeelte van dit leerboek handelen; daarbij zullen wij in eenvoudige gevallen tot een duidelijk omschreven gedragslijn kunnen komen (zie § 133). Het zal dan bv. blijken, dat de dooreenstrengeling van systematische en toevallige componenten vrij ingewikkeld kan zijn, waardoor de splitsing in toevallige en systematische componenten niet mogelijk is op de eenvoudige wijze waarop de statistici dat doen. Zowel bij dit vraagstuk als bij de splitsing van de beweging naar oorzaken moet men een duidelijk onderscheid maken tussen *directe* en *indirecte* oorzaken. Een voorbeeld moge dit toelichten.

Wanneer veranderingen in de gevraagde hoeveelheid van een goed het gevolg zijn van (a) inkomensveranderingen en (b) prijsveranderingen, terwijl de prijsveranderingen het gevolg zijn van (c) veranderingen in grondstoffenprijzen, dan noemen wij (c) een *indirecte* oorzaak van die veranderingen in de gevraagde hoeveelheid. Daarentegen zijn (a) en (b) beide *directe* oorzaken.

Een splitsing van de beweging naar componenten die aan verschillende directe oorzaken zijn toe te schrijven heeft meestal een duidelijke zin. Er mag dan echter geen indirecte oorzaak in de reeks van oorzaken worden opgenomen. De verkregen splitsing kan overigens dwars door de splitsing naar perioden heenlopen: eenzelfde directe oorzaak kan aanleiding zijn tot bewegingen van verschillende perioden, terwijl eenzelfde periode kan optreden in de bewegingen van verschillende directe oorzaken. Wanneer echter, zoals bij de seizoenbeweging vaak voorkomt, voor een bepaalde afzonderlijke oorzaak een eigen periode in de beweging kenmerkend is, die niet in de be-

wegingen met andere oorzaken voorkomt, kan een splitsing naar perioden tegelijk betekenen een splitsing naar directe oorzaken.

Het verdient aanbeveling dat men in elk voorkomend vraagstuk deze kwesties opnieuw onder de ogen ziet.

C. Het verband tussen de bewegingen van twee reeksen.

7. Nadat wij gezien hebben, welke bewegingstypen kunnen voorkomen en hoe deze in de componenten van eenzelfde reeks kunnen opgesloten liggen, willen wij thans het *verband* beschouwen dat er tussen de bewegingen van twee reeksen kan bestaan. Daarbij kunnen deze bewegingen of enkelvoudig of samengesteld zijn in de door ons bedoelde zin.

Wij zeggen met opzet dat dit verband tussen de bewegingen van twee reeksen kàn bestaan. Het behoeft natuurlijk niet te bestaan. De bewegingen kunnen ook geheel verschillend zijn. In de werkelijkheid zal er gewoonlijk een zekere mate van verband bestaan, waarvan de in het volgende te behandelen gevallen slechts het ideale type vormen, dat nooit anders dan benaderd wordt. Er is tussen twee reeksen cijfers een nauwkeurig verband of, in de taal der wiskunde, een *functioneel* verband, wanneer steeds bij een gegeven waarde van de ene reeks een nauwkeurig omschreven waarde van de andere optreedt. Wanneer daarentegen een dergelijk nauwkeurig verband afwezig is, doch wel het optreden van een gegeven waarde der ene reeks vergezeld gaat met het optreden van bij benadering telkens dezelfde waarden der andere, spreekt men wel van een *stochastisch* verband, een in de theorie der statistiek gebruikelijke term. Wij bespreken in hetgeen volgt enige der vaak voorkomende functionele verbanden.

Men kan daarbij van tweeërlei grafische voorstelling gebruik maken: men kan het verloop der beide reeksen in de tijd voorstellen, waarbij men liefst de tijdschalen laat overeenstemmen; men kan ook een zgn. *spreidingsdiagram* gebruiken. Daarbij worden in een rechthoekig assenstelsel een aantal punten getekend. Elk punt heeft twee coördinaten, waarvan de ene — bv. de x-coördinaat — een waarde van de ene reeks, de andere — de y-coördinaat — de bijbehorende waarde van de andere reeks voorstelt. Er zijn dus in deze voorstelling evenveel punten als er termen in één reeks cijfers voorkomen. In het diagram is de opeenvolging niet terug te vinden, tenzij men het

tijdstip waarop de verschillende punten betrekking hebben daarbij vermeldt.

Het eenvoudigste verband tussen twee reeksen is nu dat van de *gelijkheid*. De historische grafieken bedekken elkaar dan, wanneer men voor beide reeksen precies dezelfde verticale schaal toepast. In het spreidingsdiagram liggen alle punten op één rechte lijn, die door de oorsprong gaat en met de beide assen een hoek van 45° maakt.

Een volgend geval is dat van de *evenredigheid*. Dit geval levert historische grafieken die elkaar niet bedekken, wanneer men dezelfde verticale schaal toepast voor beide reeksen. Doch men kan ze tot bedekking brengen door de eenheden van een der grafieken te wijzigen. Zijn de getallen van reeks y alle 5 $\times$ zo groot als die van reeks x, dan behoeft men de eenheid van y slechts door een 5 $\times$ zo kleine afstand voor te stellen om dit te bereiken. Het spreidingsdiagram vertoont nu punten die nog steeds op een rechte lijn door de oorsprong liggen, doch de hellingscoëfficient van de lijn is niet

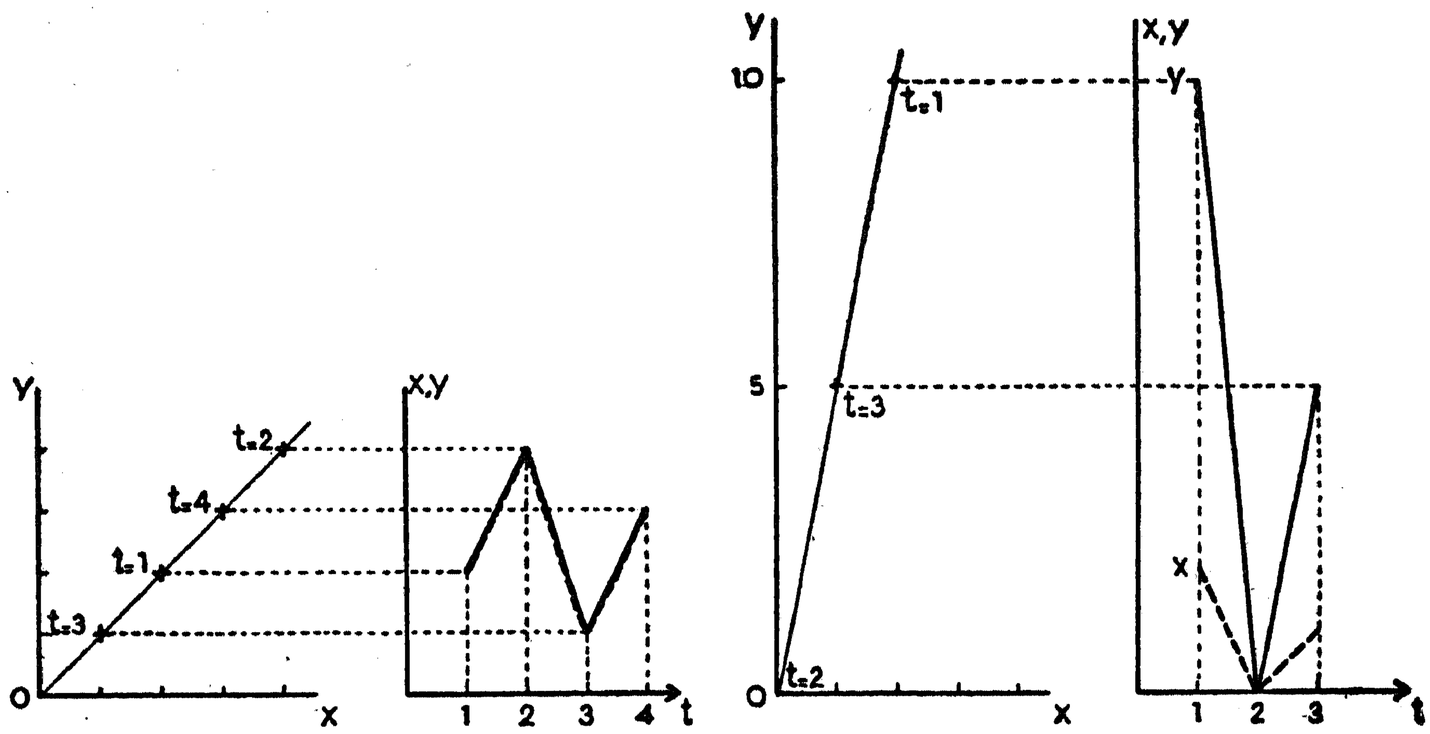

Fig. 4. Gelijkheid (1e en 2e grafiek) en evenredigheid (3e en 4e grafiek) tussen x en y. 1e en 3e: spreidingsdiagrammen; 2e en 4e: historische grafieken.

langer 1 : 1, maar 5 : 1, in het algemeen van 1 verschillend (zie fig. 4).

Een weer iets ingewikkelder verband is het *algemene lineaire* verband. Hierbij bestaat tussen de *veranderingen* der reeksen wel

evenredigheid, maar niet tussen de absolute waarden; men kan h ook zo uitdrukken, dat de verhouding van de veranderingen in reeksen een andere is dan die tussen de gemiddelden der reekse Een voorbeeld vormen de twee reeksen:

x: 10 12 11 14 12 13 (gemiddeld 12) en
y: 20 22 21 24 22 23 (gemiddeld 22).

waarbij de veranderingen der reeksen zelfs aan elkaar gelijk zij maar de verhouding der gemiddelden is niet = 1. Een tweede voor beeld is (zie fig. 5):

x: 10 12 11 14 12 13 (gemiddeld 12) en
y: 20 26 23 32 26 29 (gemiddeld 26).

waarbij de veranderingen in y telkens 3 × zo groot zijn als die in x terwijl de verhouding der gemiddelden 26 : 12 is, dus niet 3. Men kan de grafische voorstellingen in de tijd voor deze twee reeksen wel tot samenvallen brengen, als men wil, doch het is daartoe niet voldoende om de schalen alleen maar een verschillende eenheid te geven. Men moet ook nog de nulpunten op een verschillende plaats leggen.

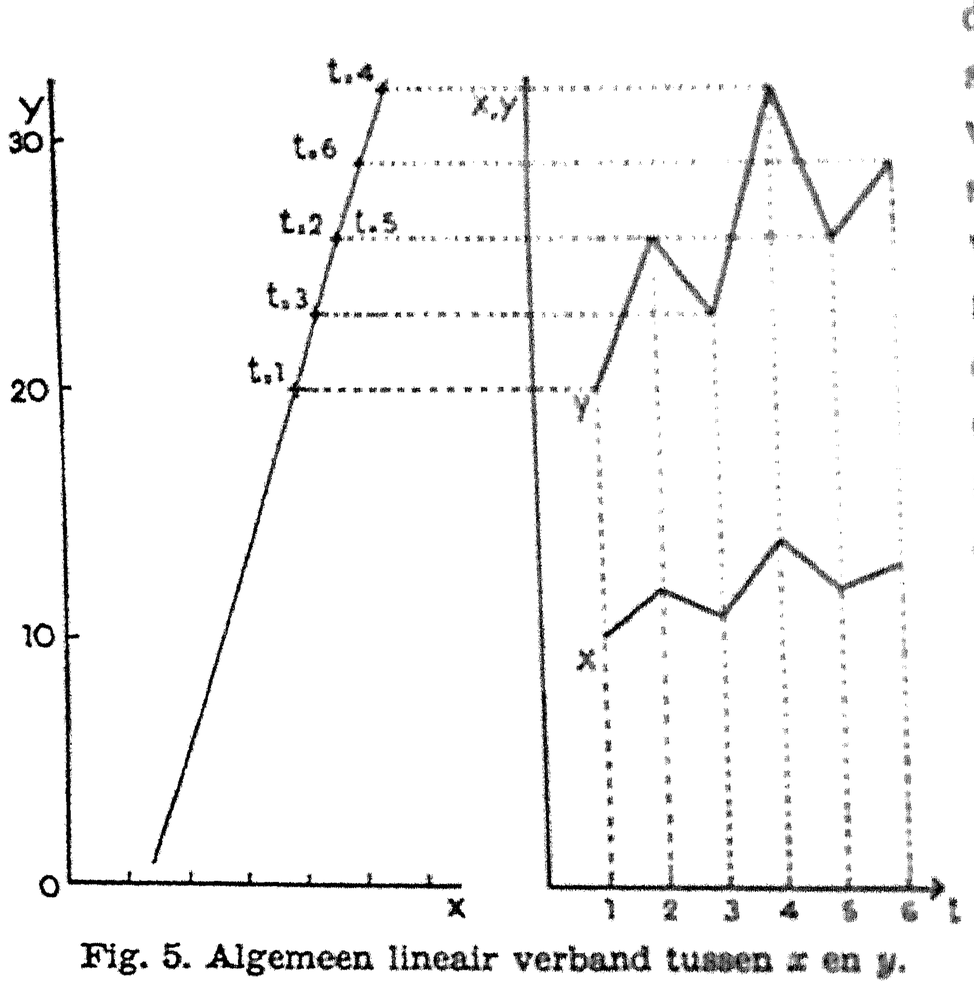

Fig. 5. Algemeen lineair verband tussen x en y.

Zo moet men om bij ons eerste voorbeeld het samenvallen te bereiken de schalen zelfs gelijk nemen, doch het nulpunt van de y-schaal leggen bij het punt —10 van de x-schaal; bij ons tweede voorbeeld moet men de y-schaal 3 × zo klein kiezen als de x-schaal en bovendien het nulpunt van de y-schaal laten vallen op het punt $3^1/_3$ van de x-schaal.

Wij zullen van twee grootheden die door een algemene lineaire functie verbonden zijn, ook wel zeggen dat zij zich *parallel* aan elkaar bewegen, terwijl ook wel gezegd wordt dat twee zodanige grootheden een (rechtlijnige) *correlatie* vertonen. Ter onderscheiding van de gevallen, waarin dit verband slechts op stochastische wijze benaderd wordt, zegt men ook wel dat deze (rechtlijnige) correlatie *volkomen* is.

Het spreekt vanzelf, dat bij twee parallel schommelende reeksen de absolute amplitude van de ene reeks groter kan zijn dan die van de andere, terwijl te zelfder tijd de relatieve amplitude van de andere reeks groter is dan die van de ene.

De gelijkheid, de evenredigheid en het algemene lineaire verband kunnen zich ook voordoen met een negatief teken. Dat betekent dan, dat de bewegingen der twee reeksen tegengesteld zijn („Gegenbewegung").

8. De drie genoemde vormen van functioneel verband worden alle door een rechte lijn in het spreidingsdiagram voorgesteld. Wij hebben bij deze gevallen wat lang stilgestaan, omdat zij bijzonder vaak zullen blijken voor te komen. Er zijn daarnaast een onoverzienbare menigte van *kromlijnige* functies, die worden voorgesteld door andere dan rechte lijnen. Al naar de aard van de samenhang die er tussen twee grootheden bestaat, kan de kromlijnigheid een zeer uiteenlopend karakter hebben. Als voorbeeld zij (fig. 6) het verband genomen

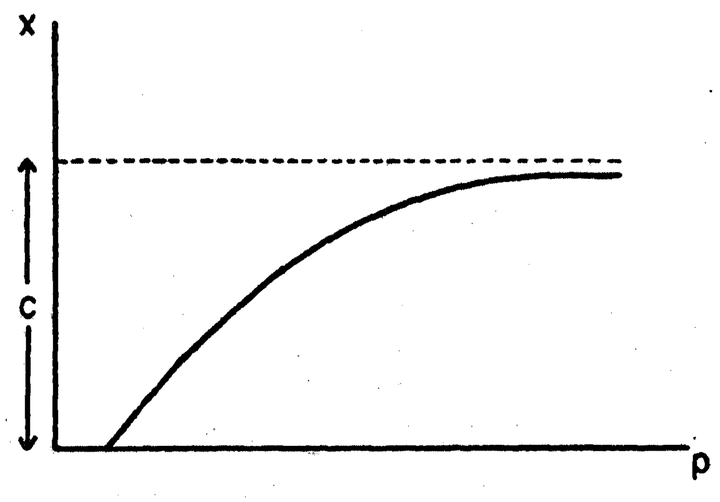

Fig. 6. Voorbeeld van een kromlijnig verband tussen twee grootheden: de aanbodcurve; *p:* prijs; *x:* aangeboden hoeveelheid; *c:* productiecapaciteit.

tussen de prijs p van een goed en de aangeboden hoeveelheid x, in de veronderstelling dat er een gegeven productiecapaciteit c bestaat en geen voorraden gevormd worden. Vanuit een betrekkelijk lage prijs beginnend, zal men aanvankelijk bij stijging van de prijs ook

stijging van de aangeboden hoeveelheid waarnemen. Wanneer echter de productiecapaciteit benaderd wordt, zal een verdere stijging van de prijs met steeds gelijke bedragen leiden tot steeds geringere stijgingen van de aangeboden hoeveelheid. Deze laatste kan niet boven de capaciteit stijgen en zal daartoe, zoals men dat uitdrukt, asymptotisch naderen; de op de hoogte c getrokken horizontale lijn is de *asymptoot*. In de historische grafieken zal men een dergelijk kromlijnig verband kunnen herkennen aan de omstandigheid, dat de reeksen wel tegelijk omhoog en omlaag gaan, doch de vorm der golven systematische verschillen vertoont en wel zodanig, dat de toppen in de reeks p spitser zullen zijn dan die in de reeks x. De twee reeksen zullen dan ook niet nauwkeurig tot samenvalling te brengen zijn, hoe men de eenheden ook verandert. Dit verschijnsel doet zich in sommige perioden van hoogconjunctuur inderdaad voor bij de prijzen en productie van minerale grondstoffen. Men noemt het het verschijnsel van de „bottle necks"; men zou in het Nederlands kunnen spreken van „opstopping".

9. Tot nog toe hebben wij aangenomen, dat de bijeenbehorende waarden van de twee cijferreeksen de *gelijktijdig* optredende grootheden zijn. Indien er echter een verband van oorzaak en gevolg bestaat tussen de twee grootheden en het causale proces dat y aan x bindt een zekere tijd T nodig heeft, zal men meer reden hebben om met elkaar te vergelijken de waarde van y die evenveel later optreedt dan de beschouwde waarde x; dus de waarde x in de periode t met de waarde y in de periode $t + T$. Zou men de historische grafieken op de gewone wijze tekenen, dan zou men de schommelingen van y zien achterlopen bij die van x; eerst wanneer men de grafiek van y over een afstand T naar links verschuift, zou weer samenvalling mogelijk zijn (wanneer de overeenkomstige waarden van x en y gelijk worden aangenomen). In het spreidingsdiagram moet men als coördinaten van één punt nu niet gelijktijdig optredende waarden van x en y nemen, doch een waarde x_t en een waarde y_{t+T}, om punten te verkrijgen die op één lijn liggen. Wij zeggen dat er een *vertraagd* verband is, dat y een *vertraging* bij x vertoont of, met een Engelse term, een „lag" (zie fig. 7).

Bij een reeksenpaar met betrekkelijk onregelmatige bewegingen

is de aanwezigheid van een dergelijke vertraging empirisch vaak gemakkelijk vast te stellen, eenmaal gegeven zijnde dat er een vertraging is. Bij een reeksenpaar met een monotone beweging is dat vrijwel onmogelijk. Bij een beweging van een zuiver periodiek karakter is het niet mogelijk om de richting van de vertraging vast te stellen, d.w.z. men kan empirisch niet vaststellen of x dan wel y voorloopt, tenzij men over de orde van grootte der vertraging enige gegevens a priori bezit.

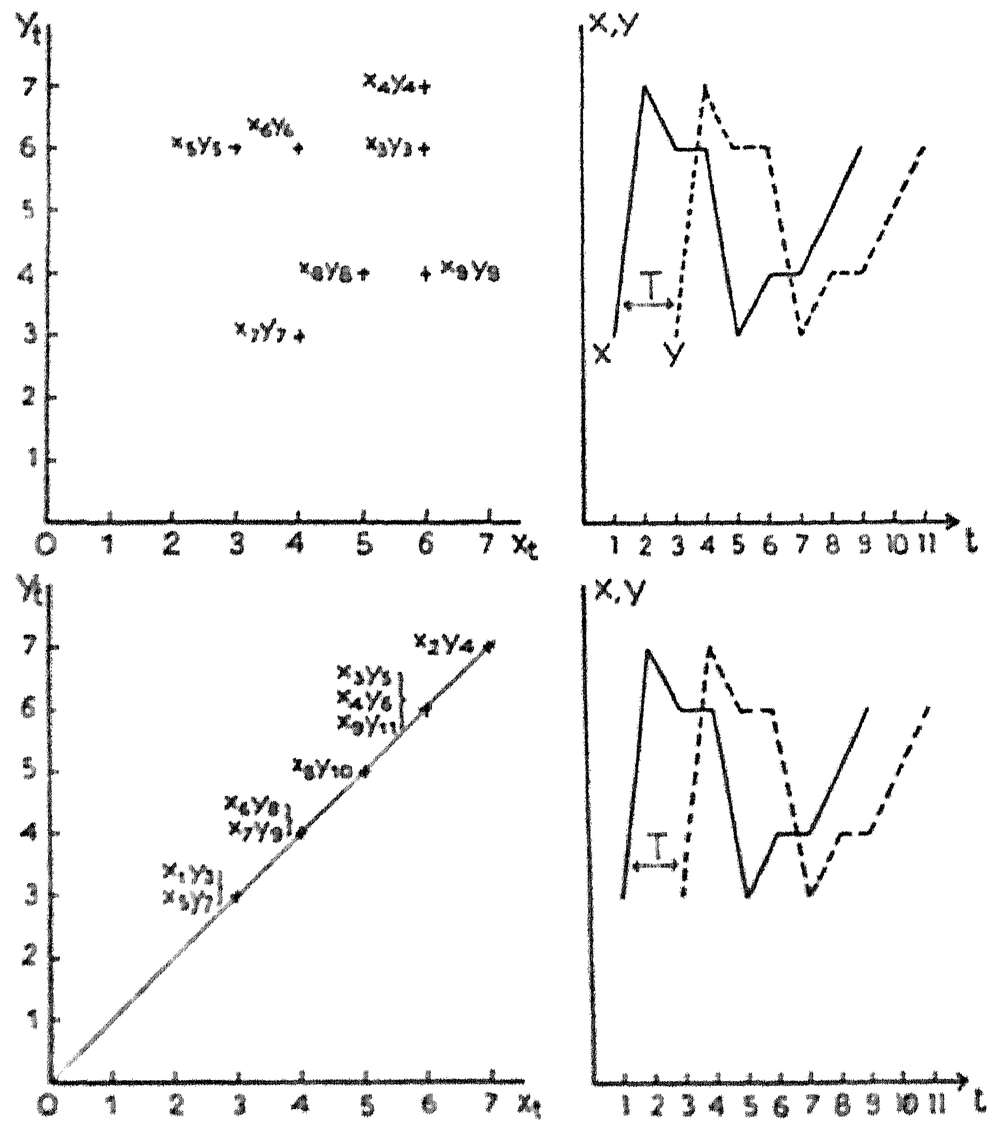

Fig. 7. Voorbeeld van vertraging tussen twee reeksen x en y. Bovenste spreidingsdiagram: gelijktijdige waarden van x en y; onderste: x_1 en y_3, x_2 en y_4 enz.

10. Er zijn nog velerlei andere relaties tussen twee grootheden mogelijk, waarbij de tijd eveneens een rol speelt. Een der in de economische analyse meest voorkomende relaties is nog die van de zgn. *cumulatie*. Een reeks y ontstaat door cumulatie van x en is „de *gecumuleerde reeks van x*", indien de n-de waarde van y gelijk is aan de som van alle eerste n waarden van x. D.w.z. de eerste waarde y_1 is gelijk aan de eerste waarde van x (x_1); de tweede waarde y_2 is de som van x_1 en x_2; $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$; $y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, enz. De betekenis van y kan bv. die van de voorraad zijn, wanneer x voor elke tijdsperiode het overschot van productie boven verbruik voorstelt. Is bv. x de goudproductie, dan is

y de totale goudvoorraad (hier kan men het verbruik verwaarlozen);
is x de netto-vermeerdering van het aantal huizen in een bepaald jaar,
dan is y de totale huizenvoorraad.

Wanneer de reeks x schommelingen vertoont, zal ook de reeks y dat kunnen doen. Veelal zal daarbij y een trendcomponent vertonen, doch deze zal afwezig zijn, indien de gemiddelde waarde van x gelijk is aan nul. Indien nu de reeks x een sinusoide is (waarbij het gemiddelde over een geheel aantal perioden gelijk is aan nul), dan zal ook de reeks y evenredig met een sinusoide zijn, zoals de wiskunde

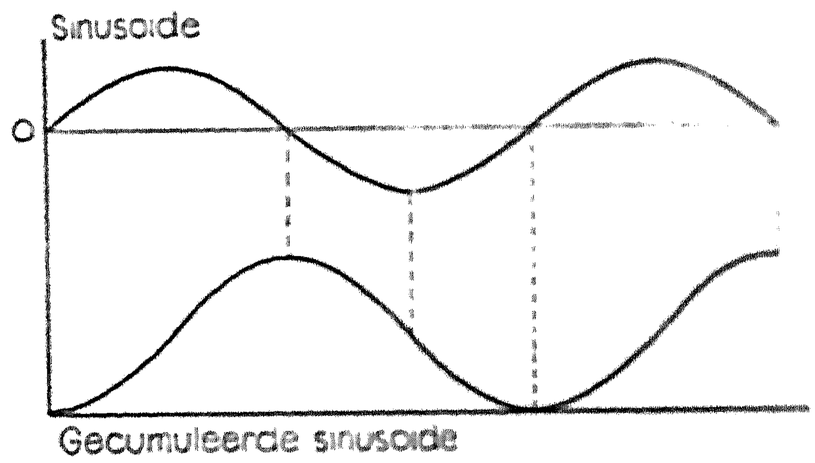

Fig. 8. Sinusoide en cumulatie van de sinusoide.

leert en zoals men aan het volgende voorbeeld met benaderde waarden zien kan (zie fig. 8):

$$x = 0,\ 0{,}7\ \ 1\ \ \ 0{,}7\ \ 0\ \ \ -0{,}7\ \ -1\ \ \ -0{,}7\ \ 0 \text{ enz.}$$
$$y = 0,\ 0{,}7\ \ 1{,}7\ \ 2{,}4\ \ 2{,}4\ \ \ 1{,}7\ \ \ 0{,}7\ \ \ 0\ \ \ \ 0 \text{ enz.}$$

De reeks y vertoont echter een vertraging bij reeks x: de toppen vallen een-vierde periode na die van x. Men overtuigt er zich gemakkelijk van — door proberen —, dat dit niet langer opgaat, wanneer de bewegingen meer onregelmatigheden vertonen.

Op grond van de grafiek van fig. 8 zou men, geheel empirisch te werk gaande, kunnen menen, dat het verband tussen x en y een vertraagd verband is, terwijl het eigenlijk een cumulatief verband is. Het is duidelijk dat tegen dergelijke vergissingen van een verkeerd toegepaste inductie slechts een juist theoretisch inzicht in het verband in kwestie kan helpen.

D. Het verband tussen de bewegingen van meer dan twee reeksen.

11. In de vorige paragraaf bespraken wij het verband tussen de bewegingen van twee reeksen. Het geval dat twee reeksen zich volkomen parallel bewegen zal zich voordoen, wanneer de veranderingen in de ene reeks veroorzaakt worden door de veranderingen in de andere en wel alleen daardoor. Bij economische verschijnselen worden echter de veranderingen in een grootheid gewoonlijk door de veranderingen in meer dan een andere grootheden veroorzaakt. In dat geval zal er tussen de beweging van één dezer laatste en de eerstgenoemde grootheid geen verband in de zin van de vorige paragraaf behoeven te staan. Er zijn nu gecompliceerder situaties mogelijk. Een betrekkelijk eenvoudig, maar zeer belangrijk voorbeeld daarvan willen wij nog vermelden. Dit doet zich voor wanneer de waarden die een reeks achtereenvolgens aanneemt elk gelijk zijn aan de som van de waarden die op hetzelfde ogenblik worden aangenomen door enige andere reeksen. Onderstaand getallenvoorbeeld moge dit toelichten. Daarbij zijn de waarden van reeks A telkens gelijk aan de som der waarden van de reeksen B en C.

Om redenen van wiskundige aard, die wij hier laten rusten, is het hierbij gewenst en soms nodig om van reeksen uit te gaan waarvan het gemiddelde de waarde nul heeft.

Voorbeeld I.

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reeks A	0	+2	0	0	—2	—1	—1	+2	0
Reeks B	0	+2	0	+1	0	0	0	—3	0
Reeks C	0	0	0	—1	—2	—1	—1	+5	0

Een dergelijk verband kan grafisch het beste worden weergegeven door historische grafieken. In fig. 9, bovenste helft, is dit voor ons voorbeeld uitgevoerd. Men ziet daaruit, hoe a.h.w. de verschillende kenmerken van A ten dele in B, ten dele in C zijn terug te vinden. Zo is de eerste top (in jaar 2) in B, de tweede (in jaar 8) in reeks C terug te vinden. C wordt daarbij zelfs ten dele „tegengewerkt" door B, die in dat jaar een dal vertoont. Het gecompliceerde dal in de jaren 5—7 bij reeks A wordt ook in reeks C teruggevonden. Het is juist door de samenwerking van de reeksen B en C, dat het beeld

van reeks A wordt verkregen. Eén der reeksen B of C kan de bewegingen in A niet „verklaren"; slechts de som van beide.

Het verband tussen een „te verklaren" reeks A en de „verklarende" reeksen B en C kan in vele opzichten ingewikkelder zijn. Een

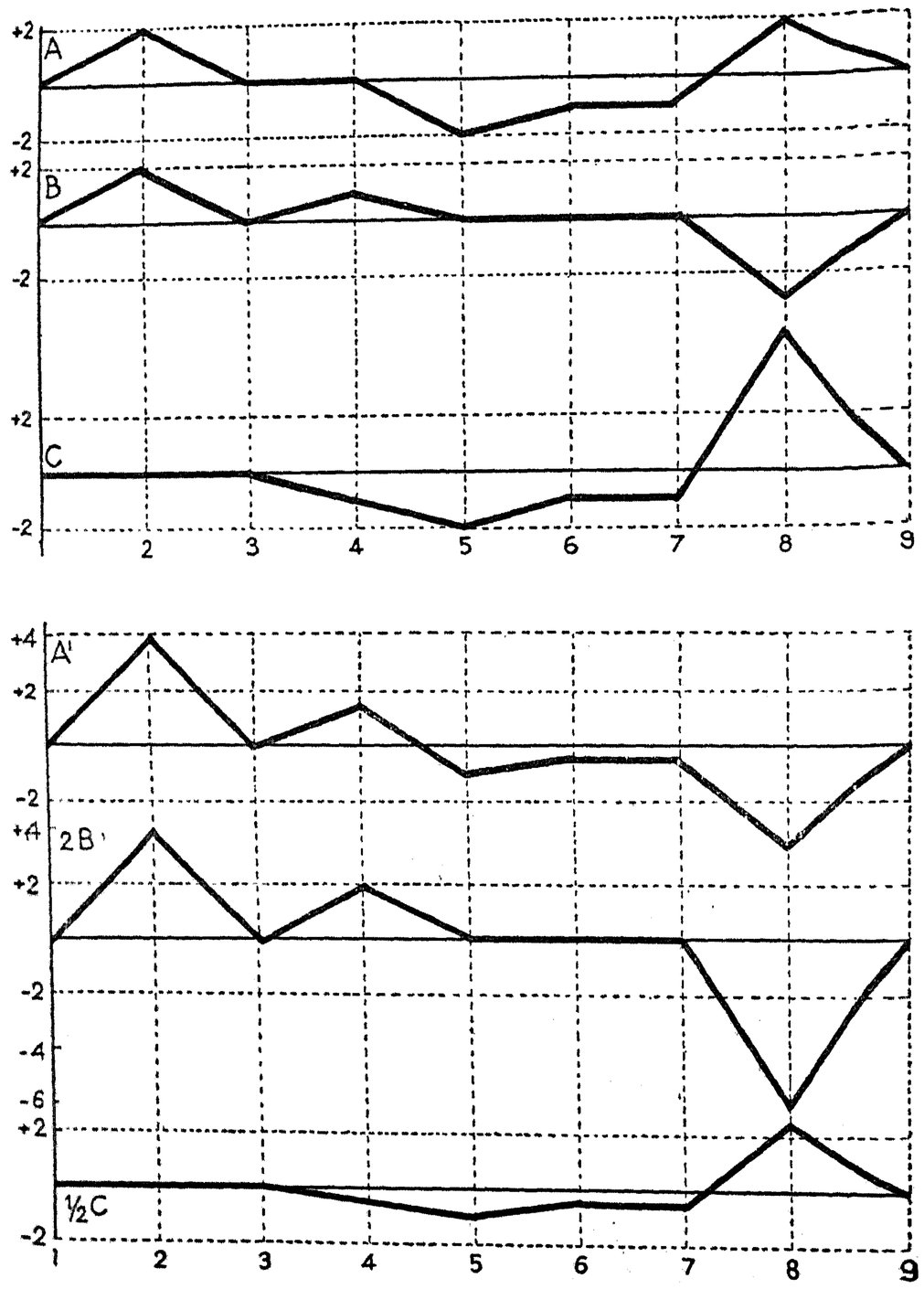

Fig. 9. Voorbeelden van multipele correlatie; $A = B + C$; $A' = 2B + \frac{1}{2} C$.

eenvoudige verdere complicatie is er, wanneer B en C, alvorens te worden opgeteld, met een zekere coëfficiënt moeten worden vermenigvuldigd. Een voorbeeld daarvan is het onderstaande, waarin de reeksen B en C ongewijzigd zijn gelaten, doch een andere reeks A' als te verklaren reeks is aangenomen.

Voorbeeld II.

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reeks A′	0	+4	0	+1½	—1	—½	—½	—3½	0
2 × reeks B	0	+4	0	+2	0	0	0	—6	0
½ × reeks C	0	0	0	—½	—1	—½	—½	+2½	0

Thans moeten de waarden van reeks B met 2, die van reeks C met ½ worden vermenigvuldigd, om na optelling die van A′ te verkrijgen. Grafisch (fig. 9, onderste helft) is opnieuw te zien, dat het dal van A′ in de jaren 5—7 opnieuw slechts kan worden teruggevonden in reeks C, de top in jaar 2, die thans een uitgesprokener karakter draagt, slechts in reeks B. Daarbij is thans een top in A′ aanwezig in het jaar 4, die in B eveneens aanwezig is en thans door de „grotere invloed" van B niet door C wordt gecompenseerd, die daar ter plaatse een dal heeft. Iets dergelijks treedt op in het jaar 8, waar thans het dal van reeks B „zegeviert", terwijl in ons eerste voorbeeld de top van reeks C de overhand had.

12. Er kunnen nog vele verdere complicaties optreden. Het verband tussen A, resp. A′ aan de ene kant en B en C aan de andere was in de gegeven voorbeelden „additief", d.w.z. dat een optelling moest worden verricht (B + C, resp. 2 B + ½ C) om A resp. A′ te verkrijgen. Het is denkbaar, dat hierbij ingewikkelder wiskundige bewerkingen nodig zijn, zoals vermenigvuldigen, machtsverheffing, e.d. Het laat zich echter mathematisch bewijzen, dat, wanneer de schommelingen der reeksen betrekkelijk klein zijn in vergelijking tot hun gemiddelde waarden, ook dergelijke ingewikkelder bewerkingen resultaten opleveren, die weinig afwijken van de resultaten van optellingen. Zo kan men een vermenigvuldiging van twee indexcijfers die slechts weinig van 1 afwijken:

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reeks P	1,02	1,04	0,99	1,00	0,98	0,97	1,02	1,00	0,98
Reeks Q	1,01	0,99	0,98	1,02	1,00	1,01	1,02	0,97	1,00
P × Q	1,0302	1,0296	0,9702	1,0200	0,9800	0,9797	1,0404	0,97	0,98

met grote benadering vervangen door een optelling bij 1 van de som der afwijkingen die de reeksen P en Q van dat gemiddelde vertonen:

Afwijkingen	reeks P	0,02	0,04	—0,01	0,00	—0,02	—0,03	0,02	0,00	—0,02
	„ Q	0,01	—0,01	—0,02	0,02	0,00	0,01	0,02	—0,03	0,00
Som		0,03	0,03	—0,03	0,02	—0,02	—0,02	0,04	—0,03	—0,02

Wanneer de gemiddelden andere waarden hebben of wanneer er sprake is van andere mathematische bewerkingen, wordt de benaderende optelling wat anders, doch het blijft mogelijk een zodanige benadering aan te geven. En daarom komt aan ons voorbeeld II een zeer algemene betekenis toe. Om die reden zullen wij nog iets nader op dit voorbeeld ingaan.

De coëfficiënten 2 en ½, waarmee in voorbeeld II de reeksen B resp. C vermenigvuldigd worden, zullen wij *beïnvloedingscoëfficiënten* noemen. De reeksen $B' = 2 \times B$ en $C' = \frac{1}{2} \times C$, die op de onderste twee regels van dat voorbeeld voorkomen, noemen wij resp. de „invloed van B op A" en de „invloed van C op A". Wanneer wij deze „invloeden" door een enkel getal willen kenmerken — bv. wanneer wij wensen vast te stellen of „de invloed van B op A" „groot" of „klein" is —, dan kunnen wij daarvoor nemen de gemiddelde afwijking of de middelbare afwijking zoals die uit de theoretische statistiek bekend zijn.

De theoretische statistiek behandelt het vraagstuk, hoe men de beïnvloedingscoëfficiënten bij twee reeksen B en C moet kiezen, om een gegeven reeks A″ zo goed mogelijk te benaderen. Dit vraagstuk heeft betekenis, wanneer men een economische theorie wil controleren, die beweert, dat de bewegingen van de grootheid A″ volgen uit die van de grootheden B en C, doch niet kan aangeven, hoe groot de beïnvloedingscoëfficiënten zijn. Dit is in de economische theorie de meest voorkomende situatie; men kan het verband qualitatief, doch niet quantitatief aangeven. De met de methoden der theoretische statistiek bepaalde beïnvloedingscoëfficiënten noemt men daar *regressiecoëfficiënten*. Wanneer blijkt dat A″ precies gelijk is aan de som van enige malen B en enige malen C (zoals in voorbeeld I voor reeks A en in voorbeeld II voor reeks A′ het geval is), zegt men dat er tussen A″ aan de ene en B en C aan de andere kant volkomen *multipele* correlatie is; is A″ niet aan deze som gelijk, dan is er een zekere graad van multipele correlatie, die men kan uitdrukken door de *multipele correlatiecoëfficiënt*. Voor de voorwaarden die vervuld moeten zijn, opdat men de regressiecoëfficiënten met een gegeven nauwkeurigheid kan berekenen uit de cijfers der reeksen A″, B en C verwijzen wij naar de leerboeken der statistiek.

Het beeld van fig. 9, behorende bij voorbeeld II, is als prototype van de

multipele samenhang tussen meer dan twee grootheden van veel belang. Het behoeft daarbij niet te blijven bij twee verklarende reeksen, doch er kunnen er willekeurig veel zijn. Hoeveel reeksen er ook zijn, steeds zal echter gelden dat voor de verklaring van toppen en dalen in de te verklaren reeks ook de verklarende reeksen aan zekere eisen zullen moeten voldoen. Laatstgenoemde reeksen zullen bv. geen rechte lijnen kunnen zijn. In de taal der economische schommelingen: de verklaring van conjunctuurschommelingen uit reeksen die uitsluitend een trendbeweging vertonen is onmogelijk. Deze stelling is niet overbodig, aangezien er theorieën zijn geweest die de conjunctuuropleving hebben willen toeschrijven aan de vermeerdering van de bevolking. Deze laatste reeks vertoont echter vrijwel uitsluitend een trendbeweging. Dergelijke opmerkingen kunnen gemaakt worden over het verloop van de arbeidsproductiviteit — dit is als regel ook, voor de volkshuishouding als geheel, slechts een beweging volgens een rechte lijn of een zeer flauw gebogen lijn.