WISKUNDIG AANHANGSEL

§ 1. Bewijs van de formule $x_M = \frac{1}{2}x_C$, bij lineaire vraag- en kostencurve

Zij de vraagcurve door de formule $x = a - bp$ (1,1)

weergegeven en de curve der totale kosten van een monopolist door:

$$K(x) = K_0 + K_1 x \tag{1,2}$$

De winst van dien monopolist is dan

$$Z = px - K(x)$$

Het maximum wordt bereikt, wanneer $\frac{dZ}{dx} = 0$ of:

$$p + x\frac{dp}{dx} - K'(x) = 0 \tag{1,3}$$

De uitdrukking $\frac{dp}{dx}$ moet uit (1,1) worden afgeleid; wij vinden:

$$p = \frac{a-x}{b} \text{ en dus } \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{b} \tag{1,4}$$

Voor $K'(x)$ vinden wij uit (1,2):

$$K'(x) = K_1 \tag{1,5}$$

Uit (1,3), (1,4) en (1,5) volgt:

$$\frac{a-x}{b} - \frac{x}{b} - K_1 = 0$$

of, daar het hier om de afzet x_M van den monopolist gaat:

$$x_M = \frac{a - K_1 b}{2} \tag{1,6}$$

Voor de afzet x_c bij vrije concurrentie geldt, daar dan de prijs p_c gelijk is aan de grenskosten K_1 is,

$$x_C = a - K_1 b \tag{1,7}$$

Uit (1,6) en (1,7 volgt, dat onafhankelijk van de helling b van de vraagcurve:

$$x_M = \frac{x_C}{2} \tag{1,8}$$

§ 2. BEWIJS DAT LERNER's *„monopoliegraad"* $\mu = -\eta_p$.

Laten op een markt de vraagfunctie $p = p(x)$ (2,1)
en de totale-kostenfunctie van den enigen aanbieder

$$K = K(x) \tag{2,2}$$

zijn. De winst van den monopolist is dan

$$Z = xp(x) - K(x)$$

en deze wordt tot een maximum, wanneer

$$\frac{dZ}{dx} = p(x) + xp'(x) - K'(x) = 0 \tag{2,3}$$

Daar de *prijsflexibiliteit van de vraag* per definitie gelijk is aan

$$\eta_p = \frac{dp}{dx}\frac{x}{p} = p'(x)\frac{x}{p(x)}, \tag{2,4}$$

kan vgl. (2,3) ook worden geschreven:

$$p(x)(1 + \eta_p) = K'(x) \tag{2,5}$$

LERNER's monopoliegraad μ wordt gedefinieerd door:

$$\mu = \frac{p(x) - K'(x)}{p(x)} \tag{2,6}$$

Deze uitdrukking kan uit (2,5) worden berekend, door invulling van $K'(x)$ uit (2,5) in (2,6):

$$\mu = \frac{p(x) - p(x)(1 + \eta_p)}{p(x)} = -\eta_p \tag{2,7}$$

De monopoliegraad volgens LERNER blijkt dus tegengesteld gelijk te zijn aan de prijsflexibiliteit van de vraag.

§ 3. Lijnen van gelijke winst ingeval van een duopolie van prijszetters

Wanneer wij de door de twee concurrenten gevraagde prijzen weergeven door p_1 en p_2, de omgezette hoeveelheden door x_1 en x_2, de vraagfuncties door $x_1 = f_1(p_1, p_2)$ en $x_2 = f_2(p_1, p_2)$ en de totale-kostenfuncties door $K_1(x_1)$ en $K_2(x_2)$, dan zijn de winsten der twee aanbieders, Z_1 en Z_2 achtereenvolgens gelijk aan:

$$Z_1 = p_1x_1 - K_1(x_1) = p_1f_1(p_1, p_2) - K_1\{f_1(p_1, p_2)\} \quad (3{,}1)$$

$$Z_2 = p_2x_2 - K_2(x_2) = p_2f_2(p_1, p_2) - K_2\{f_2(p_1, p_2)\} \quad (3{,}2)$$

De lijnen van gelijke winst worden daarom weergegeven door vergelijkingen die deze uitdrukkingen telkens aan een bepaalde constante gelijkstellen. Een voorbeeld moge worden gegeven voor het geval dat de vraag- en kostenfuncties van de eerste graad zijn. Daarbij dient men steeds te bedenken, dat zulke lineaire functies in de regel benaderingen zijn, die slechts binnen een zeker gebied gelden, waarbuiten zij dus niet mogen worden toegepast. Wij zullen dat nog aan een voorbeeld toelichten.

Zij dus
$$x_1 = a_1 - b_1p_1 + c_1p_2 \quad (3{,}3)$$

en
$$K_1(x_1) = K_{10} + K_{11}x_1 \quad (3{,}4)$$

De winstlijn voor een winst $= C_1$ zal dan door de volgende vergelijkingen worden bepaald:

$$Z_1 = p_1x_1 - K_{10} - K_{11}x_1 = (p_1 - K_{11})(a_1 - b_1p_1 + c_1p_2) - K_{10} = C_1$$

of

$$(p_1 - K_{11})(a_1 - b_1p_1 + c_1p_2) = C_1 + K_{10} \quad (3{,}5)$$

Dit is een hyperbool, met als asymptoten de lijnen:

$$p_1 - K_{11} = 0 \text{ en } a_1 - bp_1 + c_1p_2 = 0 \quad (3{,}6), (3{,}7)$$

De eerste lijn loopt evenwijdig aan de p_2-as (zie fig. 13) op een afstand gelijk aan de grenskosten per eenheid K_{11}; de tweede lijn is een lijn met een helling b_1/c_1, die een stuk $-\frac{a_1}{c_1}$ van de p_2-as afsnijdt en verloopt als de lijn AB in fig. 13. Een hyperbool

heeft twee takken, doch het is duidelijk, dat de tak links van de verticale asymptoot geen economische betekenis heeft. In de figuur zijn enige der lijnen van gelijke winst voor aanbieder 1 aangegeven met de curven Z_1^1 en Z_1^2. Om de figuur niet te overladen, zijn er geen soortgelijke curven voor aanbieder 2 getekend. Deze verlopen tussen een horizontale lijn $p_2 = K_{21}$ en een lijn $a_2 - b_2 p_2 + c_2 p_1 = 0$ als asymptoten.

Voor het geval dat aanbieder 1 bij wijziging van zijn prijs p_1 aanneemt, dat aanbieder 2 geen wijziging brengt in p_2, zullen wij nu de *richtlijn* voor aanbieder 1 berekenen. Deze is de meetkundige plaats der punten van ${}_1^1Z$, Z_1^2 enz. waarin een horizontale raaklijn bestaat. Daarvoor geldt dus dat $\frac{dp_2}{dp_1} = 0$ langs de curven $Z_1 = C$. Wij kunnen daartoe uit de vergelijking voor deze curven (3,5) de p_2 oplossen en naar p_1 differentiëren; een andere behandelingswijze is ook mogelijk. Wij verkrijgen:

$$c_1 p_2 = \frac{C_1 + K_{10}}{p_1 - K_{11}} + b_1 p_1 - a_1 \qquad (3,8)$$

De differentiatie levert op:

$$\frac{1}{c}\,\frac{dp_2}{dp_1} = -\frac{C_1 + K_{10}}{(p_1 - K_{11})^2} + b_1 = 0 \qquad (3,9)$$

Bij gegeven C_1 levert (3,9) ons de coördinaat p_1 van het op de curve $Z_1 = C_1$ gelegen punt met horizontale raaklijn. De bijbehorende waarde van p_2 vinden wij uit (3,5) of (3,8). Wanneer wij nu de verzameling van alle zodanige punten willen leren kennen, welke ook de waarde van C_1 is, moeten wij de waarde van C_1 elimineren uit (3,9) en (3,5); dan immers vinden wij de betrekking tussen p_1 en p_2 — d.i. de vergelijking van de meetkundige plaats — waaraan alle punten met horizontale raaklijnen op de Z_1-curven moeten voldoen. Deze eliminatie levert op:

$$C_1 + K_{10} = b_1 (p_1 - K_{11})^2 = (p_1 - K_{11})(a_1 - b_1 p_1 + c_1 p_2)$$

of, daar $p_1 - K_{11} \neq 0$:

$$b_1 (p_1 - K_{11}) = a_1 - b_1 p_1 + c_1 p_2 \qquad (3,10)$$

hetgeen na rangschikking wordt:

$$b_1K_{11} + a_1 - 2b_1p_1 + c_1p_2 = 0 \qquad (3,11)$$

Deze vergelijking hadden wij ook onmiddellijk kunnen verkrijgen door $\frac{\partial Z_1}{\partial p_1} = 0$ te stellen.

Uit (3,11) ziet men, dat dit een rechte lijn is met een helling gelijk aan het dubbele van de helling van de scheve asymptoot der winstcurven; uit (3,10) ziet men, dat aan deze vergelijking wordt voldaan door het snijpunt der asymptoten, d.i. door het gemeenschappelijke middelpunt van de hyperbolen; want door $p_1 - K_{11} = 0$ en $a_1 - b_1p_1 + c_1p_2 = 0$ wordt aan (3,10) voldaan. De richtlijn voor aanbieder 1 verloopt dus als de stippellijn CD.

Wij komen thans nog even terug op de in de aanvang van deze § aangeroerde kwestie van het geldigheidsgebied der gebruikte benaderende lineaire formules. Voor wat de kostencurve betreft, geldt dat deze niet mag worden aangewend voor waarden van x_1 die groter zijn dan de capaciteit (vgl. tekst, § 3). Voor de vraagcurve (3,3) moet o.m. gelden dat nooit een negatieve waarde voor x_1 moet worden verkregen. D.w.z. dat de geldigheid in elk geval ophoudt, wanneer:

$$b_1p_1 \geqq a_1 + c_1p_2 \qquad (3,12)$$

De grens van dit ongeldigheidsgebied wordt gevormd door de vergelijking (3,7), d.i. door de asymptoot AB. Er zal een soortgelijke begrenzing zijn, wanneer men ook de vraagcurve voor aanbieder 2 door een rechtlijnige functie voorstelt; door deze beide begrenzingen blijft er slechts een deel van het vlak over. Het is nog denkbaar, dat ook binnen deze grenzen de nauwkeurigheid van de benadering te wensen overlaat. Dit is een kwestie die slechts in concrete gevallen kan worden beschouwd.

§ 4. Afleiding van de formule voor de evenwichtsprijs bij een symmetrisch duopolie van prijszetters

Wij nemen aan, dat de in de vorige § gegeven formules voor de vraag- en de kostenfuncties gelden en dat, evenals daar, wordt aangenomen, dat ieder aanbieder van zijn concurrent verwacht,

dat deze laatste zijn prijs onveranderd laat bij prijsverlaging van den beschouwden aanbieder; wij voegen daaraan toe de veronderstelling der *symmetrie*. Dit betekent enerzijds, dat $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = c$ en andererzijds, dat $K_{10} = K_{20} = K_0$ en $K_{11} = K_{21} = K_1$ is. Bovendien is in de evenwichtsstand dan natuurlijk ook $p_1 = p_2 = p$ en $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}x$, wanneer wij onder x de totale vraag verstaan. Wij mogen echter van deze relaties nog geen gebruik maken bij het vaststellen van de evenwichtsvoorwaarden, omdat voor aanbieder 1 b.v. zijn eigen prijs p_1 niet a priori en bij het overwegen van een wijziging in zijn eigen prijs gelijk behoeft te zijn of blijven aan p_2. Wij hebben dus:

$$Z_1 = (p_1 - K_1)(a - bp_1 + cp_2) - K_0$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial p_1} = a - bp_1 + cp_2 - b(p_1 - K_1) = 0 \qquad (4,1)$$

Hieruit volgt, daar uit $\frac{\partial Z_2}{\partial p_2} = 0$ een dergelijke formule voor p_2 en p_1 wordt verkregen, dat inderdaad $p_1 = p_2$ is; stellen wij deze waarde door p voor, dan is:

$$a - bp + cp - bp + K_1 b = 0$$

en

$$p = \frac{a + K_1 b}{2b - c} \qquad (4,2)$$

Het zal nu doelmatig blijken om in te voeren de grootheid

$$a' = \frac{a}{b - c};$$

dan is (4,2) te schrijven als:

$$p = a' \frac{b - c}{2b - c} + K_1 \frac{b}{2b - c} \qquad (4,3)$$

De breuken $\frac{b - c}{2b - c}$ en $\frac{b}{2b - c}$ hebben nu de eigenschap, tezamen 1 te zijn; als wij dus $\frac{b}{2b - c} = \theta$ stellen, is $\frac{b - c}{2b - c} = 1 - \theta$.

Tevens kunnen wij vaststellen, dat $\theta > \frac{1}{2}$ is.
Wij hebben dus

$$p = (1 - \theta)\, a' + \theta K_1 \qquad (4,4)$$

De evenwichtsprijs is dus een gewogen gemiddelde van de grootheden a' en K_1, waarbij K_1, die gelijk is aan de concurrentieprijs, een groter gewicht heeft dan a'.

Bij *monopolie* zou gelden dat de afzet van den monopolist

$$x = 2a - 2bp_M + 2cp_M, \tag{4,5}$$

waarbij p_M de monopolieprijs is.
De winst

$$Z = 2\,(p_M - K_1)\,\{a - (b - c)\,p_M\} - K_0 \tag{4,6}$$

en een maximum wordt bereikt wanneer:

$$\frac{dZ}{dp_M} = 2\,\{a - (b - c)\,p_M\} - 2\,(b - c)\,(p_M - K_1) = 0 \tag{4,7}$$

Gebruik makend van dezelfde grootheid a' als hierboven werd ingevoerd, vinden wij thans

$$p_M = \frac{a' + K_1}{2} \tag{4,8}$$

De monopolieprijs blijkt dus een ongewogen gemiddelde van a' en K_1 te zijn; daaruit volgt; dat $a' > K_1$, want de monopolieprijs is altijd $> K_1$. Tevens volgt hieruit dat dan: $K_1 < p < p_M$ of: p ligt tussen de concurrentie- en de monopolieprijs.

Het hangt blijkbaar van de waarden van b en c af, waar de prijs p precies tussen de concurrentie- en de monopolieprijs ligt. Als $b = c$ is, is $\theta = 1$ en $p = K_1$, dus gelijk aan de concurrentieprijs. Dit is echter ook een uiterste: het zou betekenen, dat de vraagcurve in het geval van monopolie niet van de prijs zou afhangen (volkomen onelastische vraag). Zou c nog groter zijn, dan zou de vraag zelfs stijgen bij stijgende prijs. Afgezien van enkele hier niet te behandelen uitzonderingen (de zgn. inferieure goederen), die voor de practijk van weinig betekenis zijn, kan dit niet.

Gereleveerd moge nog worden het geval waarin b en c beide zeer groot en bijna gelijk zijn; het geval waar blijkbaar de ε van Triffin zeer groot is en wij bijna met homogene concurrentie in zijn terminologie te maken hebben. Ook dan is de evenwichtsprijs vrijwel gelijk aan de concurrentieprijs. Dit is het geval

dat BERTRAND heeft aangevoerd tegen COURNOT (zie § 7).

Een ander uiterste is dat, waarbij c = o is; dan is er in feite geen concurrentie meer tussen de beide aanbieders, doch zijn zij ieder voor hun eigen afzet monopolisten geworden. De uitkomst is dan, dat $p = p_M$, hetgeen ons niet behoeft te verbazen.

§ 5. HETZELFDE VRAAGSTUK ALS § 4, DOCH VOOR HET GEVAL, DAT ELKE AANBIEDER VAN ZIJN CONCURRENT AANNEEMT, DAT DEZE HEM BIJ PRIJSVERANDERINGEN TEN VOLLE VOLGT.

De winsten der twee aanbieders 1 en 2 zijn resp.

$$Z_1 = x_1 p_1 - K_0 - K_1 x_1 \text{ en } Z_2 = x_2 p_2 - K_0 - K_1 x_2.$$

Aanbieder 1 tracht nu Z_1 tot een maximum te maken in de veronderstelling dat een wijziging in p_1 een even grote wijziging in p_2 tot gevolg heeft. Dan is:

$$\frac{dZ_1}{dp_1} = x_1 + (p_1 - K_1)\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right) = 0 \qquad (5,1)$$

Evenzo geldt:

$$\frac{dZ_2}{dp_2} = x_2 + (p_2 - K_1)\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right) = 0 \qquad (5,2)$$

Ingeval van symmetrie zal $p_1 = p_2$ zijn; wij verkrijgen dan door optelling van (5,1) en (5,2):

$$x_1 + x_2 + (p - K_1)\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right) = 0 \qquad (5,3)$$

Wanneer wij voor $x_1 + x_2$ schrijven x (totale afzet), dan wordt (5,3):

$$x + (p - K_1)\left(\frac{\partial x}{\partial p_1} + \frac{\partial x}{\partial p_2}\right) = 0 \qquad (5,4)$$

Hierbij zijn de uitdrukkingen $\frac{\partial x}{\partial p_1}$ en $\frac{\partial x}{\partial p_2}$ aldus te verstaan:

$\frac{\partial x}{\partial p_1}$ is de verhouding tussen de totale afzetvermeerdering die het gevolg is van een verandering *alleen* in p_1 (en niet in p_2) en die verandering in p_1;

$\frac{\partial x}{\partial p_2}$ is de verhouding tussen de totale afzetverandering die het

gevolg is van een verandering *alleen* in p_2 en die verandering in p_2.

Denken we ons nu het geval van een monopolist aldus voorgesteld, dat onze twee aanbieders steeds dezelfde prijs p vragen. Wanneer men nu de verandering in x zou willen weten bij verandering in p, dan wil dat zeggen dat men een gelijktijdige en evengrote verandering in p_1 en p_2 aanneemt; de verandering in x is dan de som der veranderingen die resp. het gevolg zijn van de verandering in p_1 en die in p_2; zijn deze b.v. Δp, dan is de corresponderende wijziging Δx in x:

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial p_1}\Delta p + \frac{\partial x}{\partial p_2}\Delta p$$

en de verhouding

$$\frac{\Delta x}{\Delta p} \text{ of } \frac{dx}{dp} = \frac{\partial x}{\partial p_1} + \frac{\partial x}{\partial p_2} \qquad (5,5)$$

De formule die de afzet en de prijs van den monopolist verbindt is

$$\frac{dZ}{dp} = 0 \quad \text{of}$$

$$x + (p - K_1)\frac{dx}{dp} = 0 \qquad (5,6)$$

Blijkens (5,5) is dit echter dezelfde als geldt voor het hier beschouwde geval van duopolie. Daar ook de vraagfunctie dezelfde is, zijn dus x en p in beide gevallen identiek; in het hier beschouwde geval van duopolie wordt dus de monopoliesituatie als evenwicht bereikt.

§ 6. Oligopolie voor meer dan twee prijszetters, in het bijzonder bij lineaire vraag- en kostenfunctie en symmetrie, voor het geval dat iedere aanbieder aanneemt, dat wijziging van zijn eigen prijs geen wijziging van de prijzen zijner concurrenten ten gevolge heeft

De algemene formules voor een oligopolie van meer dan twee prijszetters zijn:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial p_i} = 0 \; (i = 1 \ldots . n), \qquad (6,1)$$

waarbij i het rangnummer van den beschouwden aanbieder en n het aantal aanbieders is en waarbij het teken ð er op wijst, dat zowel met de directe invloed van p op Z_i moet worden rekening gehouden als met de invloed die door p_i via alle andere p_j's op Z_i wordt geoefend. Voor het hier nader te beschouwen geval dat de overige p_j's geen invloed van p_i ondergaan, vereenvoudigt zich het probleem zeer sterk; dan behoeft slechts de directe of partiële invloed van p_i op Z_i in acht te worden genomen en worden de vergelijkingen:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial p_i} = 0 \; (i = 1 \ldots . n) \tag{6,2}$$

Wanneer de vraagfunctie lineair is, zal deze de gedaante hebben:

$$x_i = a_i' - b_i' p_i + \Sigma_j c_{ij}' p_j, \tag{6,3}$$

waarbij de Σ moet uitgestrekt worden over alle j's behalve de waarde i. Geven wij de verhouding tussen de door i veronderstelde verandering in p_j en de verandering in p_i die er de oorzaak van is, weer door:

$$\frac{\eth p_j}{\eth p_i}$$

dan is, bij een overeenkomstige betekenis van $\frac{\eth x_i}{\eth p_i}$:

$$\frac{\eth x_i}{\eth p_i} = - b_i' + \Sigma_j c_{ij}' \frac{\eth p_j}{\eth p_i} \tag{6,4}$$

Nu is $Z_i = x_i p_i - K_i(x_i)$, waarbij $K_i(x_i)$ de kostenfunctie van aanbieder i is; Z_i hangt dus alleen van p_i en x_i af, doch via x_i nogeens van alle p's. Daarom is

$$\frac{\eth Z_i}{\eth p_i} = \frac{\partial Z_i}{\partial p_i} + \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \frac{\eth x_i}{\eth p_i} \tag{6,5}$$

Wij nemen nu aan dat zowel de vraagfunctie lineair is als $\frac{\eth p_j}{\eth p_i} = 0$ voor alle j's $\neq i$ $(i = 1 \ldots . n)$; dan is

$$\frac{\eth Z_i}{\eth p_i} = \frac{\partial Z_i}{\partial p_i} = x_i - b_i' \{ p_i - K_i'(x_i) \} = 0 \tag{6,6}$$

Tenslotte nemen wij nu nog aan een lineaire kostenfunctie en symmetrie. De kostenfunctie zij weer

$$K(x_i) = K_0 + K_1 x_i \qquad (6,7)$$

Tengevolge van de symmetrie wordt de vraagfunctie voor elken aanbieder thans:

$$x_i = a' - b' p_i + c' \Sigma p_j \quad j \neq i,\ i = 1 \ldots . n \qquad (6,8)$$

Dit leidt tot de evenwichtsvoorwaarden:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial p_i} = x_i - b'(p_i - K_1) = 0 \qquad i = 1 \ldots . n \qquad (6,9)$$

Optelling voor alle aanbieders, onder gebruikmaking van:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots . p_n = p,$$

leidt tot:

$$x - nb'(p - K_1) = 0 \qquad (6,10)$$

Om ook deze uitkomst weer te vergelijken met die van het monopolie, tellen wij de vraagfuncties voor de afzonderlijke aanbieders (6,8) bij elkaar op, waarbij thans alle prijzen a priori aan elkaar gelijk zijn:

$$x = n[a' - \{b' - (n-1)c'\} p] \qquad (6,11)$$

Deze relatie schrijven wij als

$$x = a - bp, \qquad (6,12)$$

waarbij dus

$$a = na' \qquad (6,13)$$

$$b = n\{b' - (n-1)c'\} \qquad (6,14)$$

De uit deze vraagfunctie volgende vergelijking voor de monopolieprijs luidt:

$$p_M = \frac{a + bK_1}{2b}, \qquad (6,15)$$

terwijl invulling van (6,12) in (6,10) voor de prijs bij oligopolie oplevert:

$$p_n = \frac{a + nb'K_1}{b + nb'}; \qquad (6,16)$$

wanneer wij wederom $a/b = \alpha'$ stellen, laten zich de vergelijkingen (6,15) en (6,16) schrijven als:

$$p_M = \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}K_1 \text{ en } p_n = \frac{b}{b+nb'}a' + \frac{nb'}{b+nb'}K_1,$$

waaruit wederom blijkt dat zowel p_M als p_n een gewogen gemiddelde is van a' en K_1, waarbij, omdat K_1 de prijs bij atomistische concurrentie is, $a' > K_1$. In de formule voor p_n is het gewicht van K_1 groter dan in die voor p_M, omdat $nb' > b$ blijkens (6,14). Daarom is $p_n < p_M$, terwijl tevens $p_n > K_1 = p_C$.

Het zij aan den lezer zelf overgelaten de grenzen te bepalen, waartussen zich de waarde van c' en daarmee van p_n kan bewegen (vgl. § 4).

§ 7. Lijnen van gelijke winst bij een duopolie van hoeveelheidsaanpassers

Zij de hoeveelheid door aanbieder 1 verkocht x_1, die door aanbieder 2 verkocht x_2, en de prijs p. De vraagfunctie luidt:

$$p = f(x_1 + x_2) \qquad (7,1)$$

Zijn voorts de kostenfuncties $K_1(x_1)$ en $K_2(x_2)$, dan zijn de winsten:

$$Z_1 = px_1 - K_1(x_1) = x_1 f(x_1 + x_2) - K_1(x_1) \qquad (7,2)$$

$$Z_2 = px_2 - K_2(x_2) = x_2 f(x_1 + x_2) - K_2(x_2) \qquad (7,3)$$

Deze uitdrukkingen, gelijkgesteld aan een constante, geven de vergelijkingen voor de lijnen van gelijke winst. Wij willen ze wederom berekenen voor een voor de hand liggende bijzonder geval, nl. dat met lineaire kostenfuncties:

$$K_i(x_i) = K_{i0} + K_{i1}x_i \quad (i = 1,2) \qquad (7,4)$$

De winstlijnen voor No. 1 laten zich dan in de vorm schrijven

$$x_1(p - K_{11}) = K_{10} + C \qquad (7,5)$$

waarbij p door (7,1) gegeven is. Als nu ook nog de vraagcurve lineair is, hebben we hier wederom een vergelijking met een hyperbool met als asymptoten de lijnen

$$x_1 = 0 \text{ en } p = K_{11} \qquad (7,6)$$

Zij de vraagfunctie

$$p = p_0 - p_1 (x_1 + x_2), \qquad (7,7)$$

dan is de lijn $p = K_{11}$ een rechte lijn die van de beide assen gelijke positieve stukken afsnijdt, waarvan de grootte overeenkomt met de vraaghoeveelheid $x_1 + x_2$ die optreedt, wanneer de prijs gelijk is aan de grenskosten K_{11} van aanbieder 1. De ligging dezer hyperbolen is als is aangegeven in fig. 14 (blz. 45).

Voor het geval dat de grenskosten van No. 2 dezelfde zijn als die van No. 1 zal de scheve asymptoot voor No. 1 en No. 2 dezelfde zijn.

De richtlijn voor No. 1 kan, indien No. 1 aanneemt dat No. 2 op een verandering van x_1 niet zal reageren met een verandering van x_2, weer berekend worden als de meetkundige plaats van de punten op de winstlijnen van No. 1 waar een horizontale raaklijn bestaat, d.z. de punten waarvoor

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 0 \qquad (7,8)$$

waarbij x_2 moet worden opgelost uit (7,5) en vervolgens uit (7,5) en (7,8) de constante C moet worden geëlimineerd (men vergelijke de behandeling van het overeenkomstige vraagstuk in § 3). De uitkomst is dat de vergelijking voor de richtlijn luidt:

$$p_1 x_2 + 2p_1 x_1 + K_{11} - p_0 = 0 \qquad (7,9)$$

door welke vergelijking een rechte lijn wordt voorgesteld, die door het gemeenschappelijke middelpunt M van de hyperbolen gaat en een tweemaal zo sterke helling heeft als de scheve asymptoot. Voor aanbieder No. 2 wordt een analoge richtlijn verkregen (SN in fig. 14).

§ 8. Omzet en prijs bij een symmetrisch oligopolie van hoeveelheidsaanpassers en bij lineaire vraag- en kostencurven

De vraag- en kostenfuncties zijn in dit geval resp.:

$$p = p_0 - p_1 (x_1 + x_2 + \ldots . x_n) \qquad (8,1)$$

$$K_i (x_i) = K_0 + K_1 x_i \quad (i = 1 \ldots . n) \qquad (8,2)$$

waarbij n het aantal aanbieders is. De evenwichtsvergelijkingen luiden, wanneer wederom alle aanbieders aannemen, dat een wijziging in de eigen hoeveelheid geen wijzigingen veroorzaakt in de hoeveelheden der anderen:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x_i} = p_0 - p_1 (x_1 + x_2 + \ldots x_n) - K_1 - p_1 x_i = 0 \quad (i = 1 \ldots n) \quad (8,3)$$

Indien wij deze vergelijkingen voor alle waarden van i optellen verkrijgen wij, als wij de totale omzet door x_n aangeven:

$$n (p_0 - p_1 x_n) - nK_1 - p_1 x_n = 0 \quad (8,4)$$

waaruit voor x_n volgt:

$$x_n = \frac{p_0 - K_1}{p_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} . \quad (8,5)$$

Voor p_n, de in de evenwichtspositie heersende prijs, vinden wij met (8,1):

$$p_n = \frac{\frac{1}{n} p_0 + K_1}{1 + \frac{1}{n}} \quad (8,6)$$

Wij willen deze uitkomsten wederom vergelijken met die voor het monopolie en voor de vrije concurrentie. Voor het geval van monopolie geldt:

$$p_M = p_0 - p_1 x_M \quad (8,7)$$

$$Z_M = x_M (p_M - K_1) - K_0, \quad \frac{dZ_M}{dx_M} = p_0 - p_1 x_M - K_1 - p_1 x_M = 0$$

waaruit volgt:

$$x_M = \frac{p_0 - K_1}{2p_1} \quad (8,8)$$

en

$$p_M = \frac{p_0 + K_1}{2} \quad (8,9)$$

Bij vrije concurrentie zal zich een prijsniveau p_C instellen dat gelijk is aan K_1.

Uit de aldus verkregen uitkomsten laten zich gemakkelijk de in de tekst (§ 7) genoemde formules afleiden:

$$x_n = \frac{2x_M}{1 + \frac{1}{n}} \quad \text{en} \quad p_n = \frac{2p_M + (n-1)\,p_C}{n+1}$$

§ 9. Bepaling van de onafhankelijkheidspunten en het punt van Edgeworth-Bowley

In het algemene geval van een duopolie van hoeveelheidsaanpassers dient men rekening te houden met de mogelijkheid dat No. 1 verwacht dat x_2 zich zal wijzigen als gevolg van een verandering in x_1; geven wij de verhouding van deze twee wijzigingen weer aan door

$$\frac{\delta x_2}{\delta x_1},$$

waarbij de tekens δ er ons aan herinneren dat het niet de werkelijke x_2 behoeft te zijn, waarvoor deze verhouding geldt. De vergelijkingen die het evenwichtspunt bepalen zijn dan:

$$\frac{dZ_1}{dx_2} = f(x_1+x_2) + x_1 f'(x_1+x_2)\left(1 + \frac{\delta x_2}{\delta x_1}\right) - K_1'(x_1) = 0 \quad (9{,}1)$$

$$\frac{dZ_2}{dx_2} = f(x_1+x_2) + x_2 f'(x_1+x_2)\left(1 + \frac{\delta x_1}{\delta x_2}\right) - K_2'(x_2) = 0 \quad (9{,}2)$$

Deze gaan wij nu toepassen op het bijzondere geval dat 2 aanneemt, door veranderingen in x_2 geen wijzigingen in x_1 te kunnen bewerkstelligen, terwijl 1 met de wijze waarop 2 zijn maximale winst nastreeft ten volle en in overeenstemming met de werkelijkheid rekening houdt. Vergelijking (9,2) wordt nu, daar $\frac{\delta x_1}{\delta x_2} = 0$ is, een vergelijking die x_2 oplevert als functie van x_1; zeggen wij

$$x_2 = Q(x_1) \qquad (9{,}3)$$

Op deze functie baseert 1 zijn schatting van $\frac{\delta x_2}{\delta x_1}$, d.w.z.

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = Q'(x_1) \qquad (9,4)$$

waardoor (9,1) zich wijzigt in:

$$f\{x_1+Q(x_1)\}+x_1 f'\{x_1+Q(x_1)\}\{1+Q'(x_1)\}-K_1'(x_1)=0 \qquad (9,5)$$

Hieruit is x_1 in principe op te lossen, waarna uit (8,3) x_2 volgt. De aldus verkregen waarden van x_1 en x_2 zijn de coördinaten van het *onafhankelijkheidspunt* van 1.

De coördinaten van het punt van EDGEWORTH-BOWLEY zijn nu resp. de x_1 van het onafhankelijkheidspunt van 1 en de x_2 van het onafhankelijkheidspunt van 2.

§ 10. OVER DE RICHTING VAN DE RICHTLIJNEN BIJ DUOPOLIES VAN PRIJSZETTERS

Wij gaan hiertoe uit van de in § 3 gegeven formules, doch generaliseren deze nog iets verder, door aan te nemen dat de kostenfunctie

$$K_1(x_1) = K_{10} + K_{11}x_1 + K_{12}x_1^2 \qquad (10,1)$$

waardoor de grenskostencurve een rechte lijn van willekeurige richting wordt; stijgend indien $K_{12} > 0$, van constante hoogte indien $K_{12} = 0$ en dalend als $K_{12} < 0$.

Voor het gemak van het schrijven laten wij, zolang wij alleen over verkoper 1 spreken, de eerste index weg.

De lijnen van gelijke winst worden nu:

$$Z_1=(p_1-K_1-K_2a+K_2bp_1-K_2cp_2)(a-bp_1+cp_2)-K_0=C \qquad (10,2)$$

De richtlijn wordt gevonden door te stellen:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial p_1}=0 \quad \text{of}$$

$$p_1(-2b-2K_2b^2)+p_2(c+2K_2bc)+a+2abK_2+bK_1=0 \qquad (10,3)$$

De richting r_1 van deze lijn is

$$2\,\frac{b}{c}\,\frac{1+K_2b}{1+2K_2b} \qquad (10,4)$$

A. Voor $K_2 = 0$ (*constante grenskosten*) hebben wij de uitkomsten van § 3 (vgl. (3,11)) weer. De helling is dan $2\frac{b}{c}$. Voor *normale* goederen is $b > c$, waardoor deze hellingscoëfficiënt > 2 wordt. Hetzelfde geldt voor r_2 t.a.v. de verticale as gerekend. T.o.v. de horizontale (p_1) as geldt dan dat $r_2 < \frac{1}{2}$. Daarom is dan steeds $r_1 > r_2$, terwijl beide pos tief zijn; d.i. geval 1 van fig. 20 van de tekst.

Voor *inferieure* goederen is $b < c$; daardoor is $r_1 < 2$. Evenzo kan dan $r_2 > \frac{1}{2}$ zijn. De mogelijkheid is hier aanwezig dat $r_1 < r_2$ wordt (geval 2), ofschoon hij niet groot is. Steeds zijn nog beide hellingen positief.

B. $K_2 > 0$ (*stijgende grenskosten*). Ook thans is $r_1 > 0$, doch tevens $< \frac{2b}{c}$ en weer $> \frac{b}{c}$; slechts wanneer $K_2 = \infty$ zou worden wordt als grensgeval $r_1 = \frac{b}{c}$. Voor *normale* goederen is dat nog steeds > 1. Naar analogie is r_2 dan nog steeds < 1, waardoor weer slechts geval 1 zich kan voordoen. Voor inferieure goederen is er nu grotere kans, dat zich geval 2 voordoet, waarbij $r_1 < r_2$.

C. $K_2 < 0$ (*dalende grenskosten*). Wanneer $2\,|K_2 b| > 1$ zal nu de noemer van de breuk in (10,4) < 0 zijn en daardoor de $r_1 < 0$. Dit geldt, zolang $|K_2 b| < 1$. Wanneer $2|K_2 b|$ slechts even groter is dan 1, is de helling in absolute maat zeer groot, wanneer $|K_2 b|$ slechts even kleiner is dan 1, zeer klein. Alle negatieve waarden van r_1 zijn dus mogelijk. Voorwaarde dat elk punt van de richtlijn een maximum en niet een minimum van Z_1 oplevert, is

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial {p_1}^2} < 0 \qquad (10,5)$$

Uit (10,3) blijkt dat

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial {p_1}^2} = -\,2b\,(1 + K_2 b), \qquad (10,6)$$

waardoor aan de gestelde eis voldaan is, zolang $|K_2 b| < 1$, d.i. juist in het door ons beschouwde interval. Wij mogen daarom concluderen dat bij dalende grenskosten zich alle negatieve

waarden van r_1 en r_2 kunnen voordoen, waaruit volgt, dat hier de gevallen 3, 4, 5 en 6 van fig. 20 kunnen bestaan.

Indien $|K_2 b| > 1$ wordt, zijn de punten waar de lijnen van gelijke winst horizontale raaklijnen hebben, niet langer punten van maximum-, maar van minimumwinst. De punten van maximumwinst kunnen dan niet langer worden bepaald met behulp van de differentiaalrekening, doch door rekening te houden met de grenzen die aan de hoeveelheid der productie of aan afzet of prijzen moeten worden gesteld. Het zou ons te ver voeren, hierop te dezer plaatse in te gaan. Wij vermelden daarom slechts even deze complicatie.

Het bovenstaande gold bij een duopolie van prijszetters, waarbij elke aanbieder aanneemt, dat zijn concurrent niet zal reageren op eigen prijsveranderingen. Wij laten deze veronderstelling thans vallen en stellen

$$\frac{\delta p_2}{\delta p_1} = e.$$

Zelfs wanneer wij nu het eenvoudige geval van § 3, dus dat van de *constante* grenskosten, kiezen, is de helling van de richtlijn

$$r_1 = \frac{2b - ce}{c} = \frac{2b}{c} - e \qquad (10{,}7)$$

waaruit blijkt dat bij voldoende grote waarden van e reeds een belangrijke verkleining van richtingscoëfficiënt kan worden verkregen. Weliswaar is het waarschijnlijk dat $e \leqq 1$ is — de verwachte prijsverandering dp_2 als gevolg ener verandering dp_1 zal deze laatste in absolute waarde in de regel niet overtreffen —, doch ook daardoor worden de in het voorgaande gesignaleerde mogelijkheden van kleine positieve en negatieve hellingen van de richtlijn van 1 slechts versterkt. Bedacht moet echter worden, dat de bewegingen der ruilers thans niet meer, zoals in de tekst reeds werd opgemerkt, plaats hebben langs horizontale en verticale lijnen.

§ 11. Het effect van enige achtereengeschakelde monopolies in een bedrijfskolom onder vereenvoudigende veronderstellingen

Wij beschouwen het probleem waarvan de gegevens en de voorwaarden zijn uiteengezet in § 18 van de tekst. Zij de prijs die in het eerste stadium wordt gevraagd p_1, die in het 2e en 3e resp. p_2 en p_3. Zij verder de hoogte der marginale bewerkingskosten in elk der drie stadia resp. K_1, K_2 en K_3. De vraagcurve in het laatste (3e) stadium zij

$$x_3 = x_{30} - b_3 p_3 \qquad (11,1)$$

Monopolist No. 3 beschouwt de door hem betaalde prijs p_2 als gegeven. Hij maakt onder die omstandigheden zijn winst

$$Z_3 = x_3 p_3 - K_3 x_3 - p_2 x_3 = x_3 (p_3 - K_3 - p_2) \qquad (11,2)$$

tot een maximum, waarbij x_3 en p_3 aan elkaar verbonden zijn door (11,1). Het is onverschillig dat wij in (11,2) de vaste kosten hebben verwaarloosd, omdat deze op de hoogte van x_3 en p_3 geen invloed hebben.

$$\frac{dZ_3}{dx_3} = p_3 - K_3 - p_2 + x_3 \frac{dp_3}{dx_3} = 0 \qquad (11,3)$$

Uit (11,1) volgt, dat:

$$\frac{dp_3}{dx_3} = -\frac{1}{b_3}, \qquad (11,4)$$

waardoor (11,3) wordt:

$$p_3 - K_3 - p_2 - \frac{x_3}{b_3} = 0 \qquad (11,5)$$

Deze vergelijking bepaalt, tezamen met (11,1), de x_3 en p_3 als functie van K_3 en p_2. Wij willen hem echter tevens gebruiken om de afgeleide vraagfunctie die voor de 2e markt geldt, te bepalen. De daar omgezette hoeveelheid x_2 is, door de wijze waarop wij onze hoeveelheden meten, gelijk aan x_3. Wij moeten, om een verband te vinden tussen p_2 en x_2 de p_3 dan eerst in $x_3 (= x_2)$ uitdrukken:

$$\frac{x_{30} - x_3}{b_3} - K_3 - p_2 - \frac{x_3}{b_3} = 0 \qquad (11,6)$$

waaruit volgt:

$$x_2 = x_3 = \tfrac{1}{2}x_{30} - \tfrac{1}{2}b_3K_3 - \tfrac{1}{2}b_3p_2 \qquad (11,7)$$

Hier zien wij, dat de helling van de vraaglijn tot de helft is gereduceerd: de coëfficiënt van p_2 is slechts $\frac{1}{2}b_3$.

Monopolist No. 2 zal nu zijn prijs p_2 aldus vaststellen, dat zijn winst (afgezien van vaste kosten):

$$Z_2 = x_2p_2 - K_2x_2 - p_1x_2 = x_2\,(p_2 - K_2 - p_1) \qquad (11,8)$$

een maximum wordt. Daarbij moet nu van (11,7) gebruik gemaakt worden; wij vinden, analoog met (11,5):

$$p_2 - K_2 - p_1 - \frac{x_2}{\frac{1}{2}b_3} = 0 \qquad (11,9)$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af, dat de helling van de vraaglijn waartegenover monopolist No. 1 zich ziet geplaatst, opnieuw de helft is van die van de vraaglijn (11,7), dus $\frac{1}{4}$ van de oorspronkelijke.

Thans willen wij vgl. (11,7) gebruiken om er de hoogte van p_3 uit af te leiden, als functie van p_2 en K_3. Daartoe moeten wij x_3 uit (11,1) invullen:

$$p_3 - K_3 - p_2 - \frac{x_{30}}{b_3} + p_3 = 0, \qquad (11,10)$$

waaruit volgt:

$$p_3 = \tfrac{1}{2}\,(K_3 + p_2) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x_{30}}{b_3}\right)$$

De breuk $\frac{x_{30}}{b_3}$ geeft blijkens (11,1) de prijs $\bar{p}$ aan, waarbij in het geheel geen vraag meer optreedt; wij hebben dus:

$$p_3 = \tfrac{1}{2}\,(K_3 + p_2) + \tfrac{1}{2}\bar{p}, \qquad (11,11)$$

d.w.z. p_3 is het ongewogen gemiddelde van $\bar{p}$ en $p_2 + K_3$. Op overeenkomstige wijze kunnen wij uit (11,9) de hoogte van p_2 bepalen als functie van p_1, door gebruik te maken van (11,7):

$$p_2 = \tfrac{1}{2}(-K_3 + K_2 + p_1) + \tfrac{1}{2}\bar{p} \qquad (11,12)$$

Voor de eerste markt, waarbij als kosten slechts de eigen verwerkingskosten optreden, doch geen prijs aan een voorafgaand stadium behoeft te worden betaald, vindt men dan:

$$p_1 = \tfrac{1}{2}(-K_3 - K_2 + K_1) + \tfrac{1}{2}\bar{p} \qquad (11,13)$$

Uit de aldus verkregen vergelijkingen (11,11), (11,12) en (11,13) volgt nu tenslotte de hoogte van p_3 als functie van de gegeven grootheden K_1, K_2 en K_3 en $\bar{p}$:

$$p_3 = \tfrac{1}{8}(K_1 + K_2 + K_3) + \tfrac{7}{8}\bar{p}, \qquad (11,14)$$

waarmee het in de tekst genoemde resultaat is verkregen. De hoeveelheid die bij deze prijs wordt afgezet, is te vinden door deze prijs in de vraagfunctie (11,1) in te vullen. Het is mogelijk om deze berekening te controleren door een der andere prijzen in te vullen in de bijbehorende afgeleide vraagfuncties. Wij vinden:

$$x_3 = x_{30} - \frac{b_3}{8}(K_1 + K_2 + K_3) - \frac{7b_3}{8}\bar{p} =$$
$$= \tfrac{1}{8}b_3\{\bar{p} - (K_1 + K_2 + K_3)\} \qquad (11,15)$$

Het is de bedoeling deze hoeveelheid te vergelijken met de onder voorwaarden van vrije concurrentie afgezette hoeveelheid. Daarvoor vindt men uit (11,1) en bedenkende dat dan de prijs zal zijn $K_1 + K_2 + K_3$:

$$x_3' = x_{30} - b_3(K_1 + K_2 + K_3) = b_3\{\bar{p} - (K_1 + K_2 + K_3)\} \qquad (11,16)$$

Uit (11,15) en (11,16) blijkt dat:

$$x_3 = \tfrac{1}{8}x_3',$$

het eveneens in de tekst genoemde resultaat.

Op analoge wijze laat zich demonstreren dat, indien er niet 3, doch n stadia zijn, de resultaten zouden worden:

$$p_n = \frac{1}{2^n}(K_1 + K_2 + \ldots . K_n) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\bar{p} \qquad (11,17)$$

en

$$x_n = \frac{x_n'}{2^n} \qquad (11,18)$$

§ 12. HET EFFECT VAN ACHTEREENGESCHAKELDE MONOPOLIES IN ALLE BEDRIJFSKOLOMMEN ONDER VEREENVOUDIGENDE VERONDERSTELLINGEN

Wij hebben thans te maken met alle (N) eindproducten, die wij door een index i van elkaar onderscheiden; gemakshalve nemen wij weer aan dat er drie verticale stadia zijn. De in de voorafgaande § afgeleide formules gelden opnieuw. Doch thans beschouwen wij de samenhang nader die er bestaat tussen het „niveau" x_{30} van de vraaglijn en de uitkomst van het ruilproces. Deze term x_{30}, die aangeeft hoe hoog de vraag zal zijn bij een prijs = 0, hangt af van de hoogte van de inkomens Y[1]); deze laatste zijn gelijk aan de totale waarde van de productie in alle kolommen:

$$Y = \sum_{1}^{N} {}^{i} x^{i} p^{i}{}_{3} \qquad (12,1)$$

Opnieuw gaat het om een vergelijking tussen de toestand bij gecumuleerde monopolies en bij vrije concurrentie; die laatste zullen wij weer met een accent aangeven.

Om alleen het essentiële en dat in zijn eenvoudigste gedaante tot uitdrukking te brengen, wordt *volledige symmetrie* t.a.v. alle bedrijfskolommen aangenomen. Bovendien worden de eenheden waarin hoeveelheden en prijzen worden uitgedrukt zo gemakkelijk mogelijk gekozen. Wij kiezen ze aldus, dat de prijs in het eindstadium en de omgezette hoeveelheid in elke kolom bij vrije concurrentie door het getal 1 worden weergegeven; dus

$$x' = p_3{}' = 1 \qquad (12,2)$$

voor elke kolom. Daaruit volgt, rekening houdend met (12,2):

$$Y' = N$$

De vraagfuncties zullen in het algemeen de gedaante hebben:

$$x = aY - bp_3 + c \qquad (12,3)$$

1) Wij nemen aan dat x_{30} niet afhangt van de prijzen der andere eindproducten, d.w.z. dat deze van elkaar „onafhankelijke" goederen zijn. Daar wij ons niet interesseren voor verschuivingen tussen de verschillende goederen, is ook dit toelaatbaar.

De coëfficiënten van deze vraagvergelijking moeten aan de volgende eisen voldoen:

1) de gemiddelde elasticiteit van de vraag t.o.v. de prijs moet gelijk zijn aan 1, omdat bij verhoging van het prijsniveau zonder verhoging van het inkomen voor elk subject geldt dat niet meer kan worden uitgegeven dan datzelfde inkomen. Daar wij volslagen symmetrie tussen de verschillende eindproducten aannemen, zal bij elk de elasticiteit gelijk aan 1 worden aangenomen. Dat betekent dat $b = 1$.

2) de verhoging van de gevraagde hoeveelheid bij verhoging van het inkomen met 1 eenheid zonder prijsverandering is voor alle goederen tezamen aldus, dat de inkomensverhoging geheel wordt uitgegeven; de som van de coëfficienten a voor alle goederen moet daarom gelijk zijn aan 1; wegens de aangenomen symmetrie is dus voor elk $a = \frac{1}{N}$.

3) de waarde van c moet zodanig zijn, dat voor $p_3 = 1$ en $Y = N$ ook $x = 1$ is; daaruit volgt dat $c = 1$.

De vraagfuncties luiden dus:

$$x = \frac{1}{N} Y - p_3 + 1 \qquad (12,4)$$

Daar bij vrije concurrentie de prijs p_3 voor elke bedrijfskolom gelijk is aan de marginale kosten $K_1 + K_2 + K_3$, moet ook

$$K_1 + K_2 + K_3 = 1 \qquad (12,5)$$

Voor x_{30} moeten wij in onze formules dus schrijven:

$$x_{30} = \frac{1}{N} Y + 1, \qquad (12,6)$$

en ook voor

$$p = \frac{x_{30}}{b_3} = \frac{1}{N} Y + 1$$

waardoor de formule voor de monopolieprijs (11,14) wordt:

$$p_3 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{7}{8}\left(\frac{Y}{N} + 1\right) = 1 + \tfrac{7}{8}\frac{Y}{N} \qquad (12,7)$$

In de formules (12,1), (12,4) en (12,7) hebben wij nu alles wat nodig is om de toestand bij algehele monopolisatie te berekenen. Dit levert de volgende uitkomsten:

$$\left.\begin{aligned} Y &= 8N \\ p_3 &= 8 \\ x &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (12,8)$$

Voor de toestand van vrije concurrentie geldt:

$$\left.\begin{aligned} Y' &= N \\ p_3' &= 1 \\ x' &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (12,9)$$

Wij zien dus, dat bij algehele monopolisatie de productie, onder de door ons gemaakte veronderstellingen, zich niet wijzigt, wel echter het prijs- en inkomensniveau. Het ondernemersinkomen Z zal gelijk zijn aan de waarde der productie Y, verminderd met alle kosten. Deze bestaan uit de proportionele kosten $N(K_1 + K_2 + K_3)x$ en de totale vaste kosten, die wij met K_0 willen aangeven. De berekening levert op:

$$Z = 7N - K_0 \quad (12,10)$$

Onder vrije concurrentie zou gelden:

$$Z' = -K_0 \quad (12,11)$$

Op deze formules laten zich de in de tekst gegeven beschouwingen baseren.

De verkregen uitkomsten geven waarden voor de inkomens en het prijsniveau die ver buiten de uitgangspunten (de toestand van vrije concurrentie) liggen. Men kan zich met recht afvragen, of dan het gebruik van lineaire vraagfuncties nog wel toelaatbaar is. Dit is inderdaad dubieus. Onze afleidingen zijn echter ook te gebruiken — mutatis mutandis — voor gevallen van oligopolie in plaats van monopolie. En al naarmate men daarbij een aantal concurrenten aanneemt dat groter is, zal men afwijkingen van de concurrentietoestand vinden die des te geringer zijn. Voor

zulke gevallen blijft het werken met lineaire vraagcurven aanvaardbaar. Qualitatief dezelfde gevolgtrekkingen kunnen — zij het dan quantitatief minder ingrijpend — voor die gevallen dus ook dan gehandhaafd blijven, wanneer men tegen de lineaire vraagcurven bij monopolie bezwaar zou hebben.

§ 13. De invloed van monopolisering der productie bij van nul afwijkende aanbod-elasticiteiten der productiefactoren

Wij nemen, zoals in de tekst werd uiteengezet, aan, dat er slechts één goed wordt geproduceerd, waarvan de hoeveelheid u zij; de hoeveelheden arbeid a en kapitaal k die daarbij gebruikt zijn, hangen met u samen volgens de *productiefunctie* van Douglas:

$$u = a^{\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{4}} \qquad (13,1)$$

Wij nemen voorts aan, dat de aanbodfunctie van de arbeid kan worden geschreven in de vorm:

$$l = a^{L} \qquad (13,2)$$

waarbij l het reële loon is en L dus de *flexibiliteit* van het loon.

Van het kapitaal nemen wij aan, dat de aanbodselasticiteit $= 0$ is, d.w.z. dat steeds alle kapitaal wordt aangeboden. De winst der ondernemers is:

$$Z = u - la - mk \qquad (13,3)$$

Bij vrije concurrentie zullen zij deze tot een maximum maken in de veronderstelling dat l en m onbeïnvloedbaar zijn. Dat levert als maximumvoorwaarden:

$$\tfrac{3}{4}\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{L} \qquad (13,4)$$

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{3}{4}} = m \qquad (13,5)$$

Uit de eerste vergelijking vinden wij a', de hoeveelheid arbeid die wordt ingeschakeld bij concurrentie, als functie van de (gegeven) hoeveelheid kapitaal:

$$a'^{L+\frac{1}{4}} = \tfrac{3}{4}k^{\frac{1}{4}} \qquad (13,6)$$

Bij monopolie wordt door de ondernemers rekening gehouden met de afhankelijkheid die er bestaat tussen l en a; de maximumvoorwaarde luidt thans:

$$\tfrac{3}{4}\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{4}} = (L+1)\,a^{L} \qquad (13,7)$$

Deze vergelijking levert slechts reële waarden voor a, de hoeveelheid arbeid die verbruikt wordt bij monopolie, wanneer $L+1$ positief is, dus $L > -1$. Bovendien correspondeert met de gevonden waarde van a slechts dan een maximum, wanneer de 2e afgeleide van Z naar a negatief is; d.w.z.

$$-\tfrac{3}{16}\,k^{\frac{1}{4}}a^{-1\frac{1}{4}} - L(L+1)\,a^{L-1} < 0 \qquad (13,8)$$

Vullen wij in (13,8) de waarde van a uit (13,7) in, dan vinden wij als voorwaarde:

$$L > -\tfrac{1}{4} \qquad (13,9)$$

We moeten dus de situatie voor $L < -\frac{1}{4}$ nader onderzoeken. Uit (13,7) volgt:

$$a^{L+\frac{1}{4}} = \tfrac{3}{4}\,\frac{k^{\frac{1}{4}}}{L+1} \qquad (13,10)$$

Door vergelijking dezer uitkomst met (13,6), en door te bedenken, dat nu $L+1 > 0$ is, vindt men dat:

Voor $L+1 > 1$, d.w.z. voor $L > 0$, $a < a'$ en dus ook $u < u'$: door de monopolisatie vermindert zowel de hoeveelheid arbeid die wordt aangewend als de productie;

voor $L+1 < 1$, d.w.z., in verband met het voorafgaande, voor $0 > L > -\frac{1}{4}$, is $a > a'$ en dus ook $u > u'$: aangewende arbeidshoeveelheid en productie zijn bij monopolisatie groter dan bij vrije concurrentie. Voor $L = -\frac{1}{4}$ is er gelijkheid.

Bezien wij tenslotte het geval dat $L < -\frac{1}{4}$. Men heeft in dit geval

$$Z = k^{\frac{1}{4}}a^{\frac{3}{4}} - a^{L+1} - mk$$

In verband met (13,5) kan men dit transformeren in:

$$Z = \tfrac{3}{4}k^{\frac{1}{4}}a^{\frac{3}{4}} - a^{L+1}$$

Daar de exponent van a^{L+1} nu kleiner is dan $\frac{3}{4}$, zal, wanneer men a steeds meer laat groeien, de eerste term tenslotte altijd groter worden dan de tweede. De grootste winst zal dus bij een zo groot mogelijke waarde van a worden verkregen, d.i. bij volle bezetting van alle arbeid. Klaarblijkelijk geraken wij hier buiten het geldigheidsgebied van onze functies, want bij volle bezetting moet de aanbod-elasticiteit = o worden. Wij nemen daarom aan, dat de uitkomst voor dit laatste geval hier geldt. Dit geval zou alleen met ingewikkelder formules verder behandeld kunnen worden.