AANHANGSEL

17 — Afleiding van de betrekking $\delta s_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} (s_k \delta x_i - s_i \delta x_i)$.

(blz. 9)

Van de vier sommen

$$\sum_k \left(s_k \frac{\partial \delta x_i}{\partial \xi_k} + \delta x_i \frac{\partial s_k}{d\xi_k} - s_i \frac{\partial \delta x_k}{\partial \xi_k} - \delta x_k \frac{\partial s_i}{\partial \xi_k} \right)$$

waaruit de rechterzijde bestaat is de tweede nul tengevolge van de voor de elektriciteitsstroming geldende kontinuïteitsvergelijking.

De derde verkrijgt men als gevolg van de dichtheidsverandering, de eerste en vierde tengevolge van de snelheidsverandering bij variatie van de positie der ladingen met δx_i.

Wegens het behoud van rustlading gedurende de beweging is nl. de dichtheid dier lading omgekeerd evenredig met de inhoud van het ingenomen volumeëlement:

$$\frac{\rho}{\rho + \delta\rho} = \frac{\partial(\xi + \delta x)}{\partial(\xi)} \equiv D$$

waarin D de funktionaaldeterminant van de aangegeven veranderliken voor stelt. Men vindt:

$$D = 1 + \sum_k \frac{\partial \delta x_k}{\partial \xi_k}$$

en dus:

$$\delta\rho = -\rho \sum_k \frac{\partial \delta x_k}{\partial \xi_k} \tag{84}$$

De snelheid van de door het punt ξ stromende elektriciteit verandert uit twee oorzaken. Ten eerste omdat hetzelfde ladingselement een gewijzigde bewegingstoestand ondervindt; ten tweede omdat de ruimte t.o.v. de materie een verschuiving $\delta\xi = -\delta x$ heeft ondergaan; dus is, als $v_i = \frac{dx_i}{d\tau}$,

$$\delta v_i = \sum_k \frac{\partial \delta x_i}{\partial \xi_k} v_k - \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} \delta x_k. \tag{85}$$

Bedenkt men dat $s_i = \frac{\rho}{c} v_i$ dan volgt uit (84) en (85), tezamen met de betrekking $\sum_k \frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \delta x_k = 0$, de te bewijzen betrekking.

18 — Reciprociteitsbetrekkingen voor kwadratiese Φ

Tot de afleiding van de op blz. 27 genoemde reciprociteitsbetrekkingen voor het geval dat Φ in q homogeen kwadraties is kan men zeer overzichtelik aldus geraken:

Tengevolge van (48) is de „polaire vorm'':

$$F(q' \mid q'') \equiv \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_k c_{ik}\, q_i'\, q_k'' \qquad (c_{ik} = c_{ki})$$

zowel gelijk aan $\sum q_k''\, Q_k'$ als aan $\sum q_i'\, Q_i''$ of bij andere notatie voor de sommatieindex:

$$\sum_l q_l''\, Q_l' = \sum_l q_l'\, Q_l''.$$

Kiest men nu alle Q' nul behalve Q_i' en alle Q'' nul behalve Q_k'', dan vindt men (47).

Voor de gevallen $\nu \geqq 1$ leidt men de analoge, op blz. 27 genoemde stelling (49) als volgt af:

$$\sum_i \int \ldots \int d\omega\, Q_i'\, q_i'' = \sum_i \int \ldots \int d\omega \sum_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}}\right)' q_i'' =$$

$$= \sum_i \sum_\lambda \int \ldots \int d\omega \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}}\right)' . q_i''\right] - \sum_i \sum_\lambda \int \ldots \int d\omega \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}}\right)' . q_{i\lambda}''.$$

Hierin wordt de eerste integraal tot een randintegraal waarvan we veronderstellen dat hij gelijk nul is, terwijl in de tweede, tengevolge van de aangenomen eigenschap van F (homogeen kwadraties in de $q_{i\lambda}$), verwisseling der enkele en dubbele akcenten geoorloofd is. In de oorspronkelike integraal mag dit dus ook, waarmee de stelling bewezen is.

Opmerking 1: Men ziet gemakkelijk in, dat in plaats van Q_i ook gezet kan worden $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ waarmee de stelling een algemener karakter heeft verkregen.

Opmerking 2: De integrand van de laatste term is hier weer de „polaire uitdrukking'':

$$\sum_i \sum_\lambda \sum_k \sum_\mu c_{i\lambda,\, k\mu}\, q_{k\mu}'\, q_{i\lambda}''$$

welke voor $q_{i\lambda}' = q_{i\lambda}''$ overgaat in $2F'$.

19 — Betrekkingen van de vorm $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}$.

Het schijnt ons hier de meest geschikte plaats te wijzen op een type van betrekkingen dat enigszins herinnert aan de door ons besproken reciprociteitsbetrekkingen.

Is bij een eenvoudig minimumprobleem van het op blz. 14 besproken type de Φ behalve van de q's afhankelik van zekere parameters x — we laten waar dat hier geen verwarring kan stichten de indices bij de q en de x weg —, dan is:

$$\delta F = \delta[\Phi\ (q, x) - \Sigma\, Qq] = \Sigma\, \frac{\partial \Phi}{\partial q}\ \delta q\ + \Sigma\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ \delta x - \Sigma\, Q\delta q - \Sigma\, q\delta Q.$$

Volgens de oplossingsvergelijkingen (51) wordt dit:

$$\delta F = \Sigma\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ \delta x - \Sigma\, q\delta Q \tag{86}$$

Stelt men daarnaast:

$$\delta \Phi = \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, \partial x + \Sigma\, Q\delta q \tag{87}$$

en beschouwt men nu het geval dat Φ **in de** q **homogeen kwadraties is,** dan is

$$\Sigma\, Qq = \Sigma\, \frac{\partial \Phi}{\partial q}\, q = 2\Phi, \text{ dus } F = -\Phi$$

waaruit met (86) en (87) blijkt:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_Q = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_q \tag{88}$$

d.w.z. bij konstante Q is de invloed op Φ van een verandering δx juist tegengesteld gelijk aan die invloed bij konstante q.

Een interessant voorbeeld geeft de **elektrostatika.** Zijn q de ladingen van enige geleiders, x meetkundige koördinaten en is Φ de elektrostatiese energie van het stelsel, dan is aan de voorwaarde voor Φ voldaan. Q_i is dan de potentiaal van de i-de geleider, en vgl. (88) leert, dat een verschuiving van een der geleiders de elektrostatiese energie juist tegengesteld verandert, naarmate men de ladingen dan wel de potentialen der geleiders konstant houdt.

Een tweede geval waarin vgl. (88) geldt is dat van een stelsel **elektriese stromen** die elkaar wederkerig induceren. Zijn q de stroomsterkten, x weer meetkundige koördinaten der geleiders, Φ de energie van het stelsel, dan zijn de Q de elektromotoriese krachten in de ketens.

Een derde geval tenslotte is dat, waarin
x de q (blz. 6) van een **mechanies stelsel** zijn,
q de $\dot{q}$ van dat stelsel, en
Φ de T, dan is $Q_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ een moment; wanneer nu T homogeen kwadraties in de $\dot{q}$ is, (vgl. blz. 20) geldt dus:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_p = -\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_{\dot{q}} \quad [36]$$

Is het stelsel nu bovendien in de betrokken koördinaat „cyklies", d.w.z. dat in de potentiële energie die q niet voorkomt, dan volgt uit de laatste vergelijking:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)_p = -\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)_{\dot{q}}$$

waarvan de betekenis als volgt kan worden geïnterpreteerd: de energieverandering nodig voor een bepaalde kleine verandering van de q is bij konstant gehouden momenten juist *tegengesteld gelijk* aan die bij konstant gehouden snelheden: toevoer in 't ene geval betekent afvoer in 't andere geval.

20 — Direkte afleiding van een „dynamiese reciprociteitsbetrekking"

Als voorbeeld van wat wij op blz. 25 noemden een direkte afleiding van een reciprociteitsbetrekking tussen twee oorzaken en twee gevolgen geven we het volgende eenvoudige geval, dat ondertussen zelf een reversibel verschijnsel is, waarvoor de direkte afleiding niet noodzakelijk is. Het betreft een stelsel diskrete stoffelike punten, elasties gebonden aan zekere evenwichtsstanden, door krachten evenredig met de uitwijking.

In plaats van de gereduceerde koördinaten x_h dier punten — welke gelijk zijn aan $s_h \sqrt{m_h}$, waarbij s_h de uitwijking en m_h de massa is — kan men invoeren koördinaten X_h volgens

$$x_h = \Sigma\, \gamma_{hH}\, X_H \qquad (\gamma_{hH} = \gamma_{Hh})$$

zodat de potentiële energie wordt:

$$\Psi = \tfrac{1}{2} \Sigma\, \phi_H^2\, X_H^2$$

De krachtvrije beweging van zo'n stelsel, wanneer op het tijdstip 0 alle $x = 0$ zijn, wordt gegeven door

$$X_H = B_H \sin \phi_H\, t$$

Denken we ons een dergelijke beweging ontstaan door een stoot op 't tijdstip o gelijk aan $\mathfrak{Q}_h$ langs de oorspronkelike koördinaten, dan vindt men gemakkelijk voor B_h:

$$B_H = \frac{\mathfrak{Q}_H}{\phi_H}, \qquad \text{waarbij} \qquad \mathfrak{Q}_H = \sum_k \gamma_{Hk}\, \mathfrak{Q}_k,$$

---

[36]) Vgl. HERTZ, Ges. Werke III, blz. 238, Nr. 555.

waardoor de beweging kan beschreven worden door de vergelijkingen:

$$x_h = \sum_H \sum_k \gamma_{hH}\, \gamma_{Hk}\, \frac{1}{p_H}\, \mathfrak{Q}_k \sin p_H\, t$$

Hieruit leidt men — daar $\gamma_{Hk} = \gamma_{kH}$ — af, dat

$$\frac{\partial x_h\,(t)}{\partial \mathfrak{Q}_k} = \frac{\partial x_k\,(t)}{\partial \mathfrak{Q}_h}$$

welke betrekking een reciprociteitsbetrekking van de door ons gewenste soort is.

21 — Nivellerings-, behouds- en divergentie-theorema's

Onder deze namen resp. voor de gevallen $\nu = 0$, $\nu = 1$ en $\nu \geq 2$ willen we de volgende klasse van theorema's schetsmatig aangeven, waarbij we het doelmatigst beginnen bij de enkelvoudige integralen ($\nu = 1$).

Bedoelde theorema's hebben in dit geval de gedaante

$$\frac{df}{d\xi} = 0 \tag{89}$$

waarbij f de een of andere funktie van de q en de $\dot{q}$ is. Men kan ze zo uitspreken dat f konstant is voor alle ξ's, of dat er een „behoud van f'' plaats heeft. Natuurlik moeten zekere voorwaarden vervuld zijn opdat zo'n theorema geldt.

Voorbeelden zijn er vele in de mechanika. We noemen de wet van 't behoud van hoeveelheid van beweging, de perkenwet, de wet van 't behoud van energie. Voorwaarde voor de laatste is (zie blz. 35) dat de funktie van Lagrange L de ξ niet expliciet bevat.

Voor eenvoudige minimumproblemen ($\nu = 0$) kan men als hiermede analoog beschouwen die theorema's waarin de gelijkheid van zekere f voor alle waarden van de index i beweerd wordt (vgl. blz. 17). Als voorbeeld noemen we uit de thermodynamika de nivellering van drukkingen, temperaturen en thermodynamiese potentialen in de verschillende fazen van een stelsel (vgl. blz. 16), of uit de elektrostatika die van potentialen van verbonden geleiders (blz. 16) [37]). In de kinetiese gastheorie laten zich ook fraaie voorbeelden aanhalen.

Voor meervoudige integralen ($\nu \geq 2$) kan men als met de genoemde theorema's analoog beschouwen de theorema's van de vorm:

$$\sum_\lambda \frac{\partial f}{\partial \xi_\lambda} = 0$$

die we boven met „divergentietheorema's'' hebben aangeduid. Als voorbeeld

---

[37]) Voor het optiese voorbeeld (blz. 13) vindt men de wetten van terug kaatsing en breking.

ermelden we hier een uitbreiding van de „wet van het behoud van energie'' uit de mechanika:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \Omega_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\lambda} = 0 \tag{90}$$

waarbij

$$\Omega_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} F - \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \cdot q_{i\mu} \tag{91}$$

$$\left(\delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0 \text{ voor } \lambda \neq \mu \\ 1 \text{ voor } \lambda = \mu \end{cases}\right)$$

die geldt wanneer F van de ξ_λ expliciet niet afhangt.

Past men deze formules toe op de F waaruit de elektromagnetiese veldvergelijkingen worden verkregen (blz. 7) dan krijgt men een stelling zonder physiese betekenis. Doelmatiger is het dan ook om in dat geval een enigszins andere weg te bewandelen waardoor men tot de formules kan komen:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\lambda} = \sum_{\lambda} s_\lambda \, F_{\lambda\mu}$$

waarbij $T_{\lambda\mu}$ de spanningsenergietensor is. [38])

22 — Voortgezette transformatie der vgln. van Routh

Men kan uit de differentiaalvergelijkingen van Routh door voortgezette transformatie tot nog andere formuleringen der oorspronkelike vergelijkingen geraken.

Lost men nl. uit (56″) de q_j op:

$$q_j = g_j(q_l, \; \dot{q}_l, \; \dot{p}_j, \; \dot{p}_j) \tag{92}$$

en vormt men:

$$M\,(p_j, \dot{p}_j, q_l, \dot{q}_l) \equiv [R + \sum_1^k{}_j \, q_j \, \dot{p}_j]_{q_j = g_j} \tag{93}$$

(voor de notatie vgl. blz. 30) dan kan men de vgln. van Routh vervangen door (92) benevens:

$$\frac{\partial M}{\partial p_j} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial M}{\partial \dot{p}_j} = 0 \qquad 1 \leq j \leq k \qquad\qquad \frac{\partial M}{\partial q_l} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_l} = 0 \qquad k+1 \leq l \leq n \tag{94}$$

waarvan het geval voor $k = n$ vermeld wordt door J. Droste [39])

---

[38]) Zie voor een uitvoerige behandeling van deze problemen: E. Bessel-Hagen, Ueber die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, Math. Ann. **84** (1921) blz. 258; E. Noether, Invar. Variationsprobleme, Gött. Nachr. 1918, blz. 235; F. Klein, Ges. Math. Abh. I, Abh. XXXI, XXXII; D. Hilbert, Gött. Nachr. 1915, blz. 395—407.

[39]) Droste, t.a.p.

Men kan de oorspronkelike differentiaalvergelijkingen dus ook afleiden uit een minimumprobleem $\Delta J \equiv \Delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} M d\xi = 0$ met de veranderliken p_j en q_l, waarvoor geldt:

$$M = -F + \sum_1^k \frac{d}{d\xi} (p_j q_j) \tag{95}$$

$$J = -I + \sum_1^k (p_{j1} q_{j1} - p_{j0} q_{j0}). \tag{96}$$

Men vergelijke de formuleringen op blz. 13 en in § 9!

Op analoge wijze kan men te werk gaan bij minimumvraagstukken voor meervoudige integralen. Schrijft men voor

$$\sum_1^\nu{}_\lambda \frac{\partial p_{k\lambda}}{\partial \xi_\lambda}$$

de afkorting p_k en vormt men:

$$M \equiv [H + \sum_1^n p_i q_i] \tag{97}$$

dan kan men de kanoniese vergelijkingen vervangen door de vgln.

$$\frac{\partial M}{\partial p_{i\lambda}} - \sum_\mu{}_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial M}{\partial p_{i\lambda\mu}} = 0 \tag{98}$$

waarbij

$$p_{i\lambda\mu} = \frac{\partial p_{i\lambda}}{\partial \xi_\mu}. \tag{99}$$

Voorwaarden voor de doorvoerbaarheid van de transformatie van Routh en de voortgezette transformatie zijn resp.

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_j \, \partial \dot{q}_l} \right\| \neq 0 \qquad \left\| \frac{\partial^2 R}{\partial q_j \, \partial q_l} \right\| \neq 0$$

als we ons beperken tot enkelvoudige integralen.

Hieraan wordt o.a. niet voldaan door F en R's die in de betrokken argumenten van de 0-de of 1e graad zijn. Voor R vallen hieronder o.a. beweging van een mechanies stelsel in een konstant krachtveld, en het principe van Schwarzschild voor de elektrodynamika.

23 — Toepassing van de besproken theorema's op ekonomiese vraagstukken

In de volgende bladzijden willen we trachten te schetsen hoe ook in de theoretiese ekonomie vraagstukken optreden van de struktuur der door

ons besproken natuurkundige problemen, en hoe tengevolge daarvan voor de ekonomie een nuttig gebruik gemaakt kan worden van de voor de natuurkundige problemen afgeleide konklusies.

We zullen daarbij in geen enkel opzicht aanspraak maken op systematiek of volledigheid in ekonomiese zin. Men beschouwe het hier volgende uitsluitend als voorbeelden ter illustratie van de bovenstaande bewering.

We zullen alleen vraagstukken bespreken waarin slechts één ofelimiteitsfunktie optreedt, d.w.z. waarin slechts één persoon of organisatie aktief optreedt. In die gevallen kan nl. geen twijfel bestaan aan het karakter van minimumvraagstuk — er wordt gestreefd naar een maximum ofelimiteit in elk dier gevallen — terwijl overigens alle ekonomiese problemen waarin meerdere ofelimiteiten optreden opgelost worden door terug te grijpen op de eerstgenoemde soort.

In beginsel is de funktie die een maximum gemaakt moet worden, een funktie van een eindig aantal veranderliken, zoals de goederenhoeveelheden die het subjekt op elk van een aantal dagen zal bezitten, enz. We hebben dus in 't algemeen te maken met minimumproblemen van een funktie van een eindig aantal veranderliken.

Het aantal veranderliken is echter, wanneer niet van bepaalde vereenvoudigende hypothesen wordt gebruik gemaakt, zó groot, dat in vele gevallen een goede benadering en een veel eenvoudiger behandeling mogelik is door te veronderstellen dat dat aantal oneindig groot is. In speciale gevallen voert dat tot minimumproblemen voor integralen.

Problemen met een eindig aantal veranderliken

Het grootste deel van de bestaande wiskundig-ekonomiese literatuur houdt zich bezig met problemen van deze kategorie. We kunnen dus beginnen met naar deze literatuur te verwijzen [40]).

Als illustratie van de formele overeenstemming met sommige natuurkundige vraagstukken bespreken we nog het volgende voorbeeld.

Koëxistentie van ondernemingsvormen.

Zeker produkt worde vervaardigd met behulp van twee produktiegoederen 1 en 2, en wel zodanig dat een eenheid aandelenkapitaal gekombineerd met ξ_1 resp. ξ_2 van de twee goederen 1 en 2 oplevert een hoeveelheid produkt $\varphi(\xi_1, \xi_2)$.

De prijzen van 1, 2 en produkt zijn gegeven en onbeïnvloedbaar y_1, y_2, y_0.

Probleem A. De beste ξ_1 en ξ_2 te bepalen.

Noemen we $y_0 \varphi = \Psi(\xi_1, \xi_2)$

---

[40]) L. WALRAS, Eléments d'Economie Politique; S. JEVONS, Theory of Political Economy; V. PARETO, Manuel d'économie politique; BOWLEY, The Mathematical Groundwork of Economics; K. WICKSELL, Vorlesungen über Nationalökon. Theor. Teil I; A. DE PIETRI-TONELLI, Jahrb. f. Nat. ökon. u. Stat. 1928, blz. 377, en vele anderen.

dan is de winst per eenheid van aandelen-kapitaal (het rendement)

$$\rho = \Psi(\xi_1, \xi_2) - y_1 \xi_1 - y_2 \xi_2.$$

Dit wordt een maximum als ξ_1 en ξ_2 voldoen aan:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} = y_1 \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} = y_2. \tag{100}$$

Biezonder geval. De vgln. (100) leveren een dubbel stel oplossingen, nl. ξ_1', ξ_2' en ξ_1'', ξ_2''.

Naar aanleiding daarvan stellen we nu

Probleem B.. Wanneer kunnen deze twee bedrijfssoorten naast elkaar bestaan? [41])

Beschouwen we daartoe een maatschappij op aandelen met een kapitaal m waarvan m' belegd is in de eerste soort ondernemingen, m'' in de tweede soort, zodat

$$m = m' + m'' \tag{101}$$

Wanneer nu de totale winst

$$w = m' \rho' + m'' \rho''$$

door een denkbeeldige verandering van m' en m'' waarbij aan (101) voldaan wordt niet verandert, dan zal het naast elkaar bestaan der twee vormen ekonomies gewettigd zijn. Dit is het geval als

$$\rho' = \rho''$$

d.w.z. de rendementen gelijk zijn.

Deze vergelijking houdt in, daar q' en q'' alleen afhangen van de konstanten y_1 en y_2, dat er tussen die twee prijzen een bepaald verband bestaat:

$$f(y_1, y_2) = 0 \tag{102}$$

Hieraan wordt voldaan door een enkelvoudige oneindigheid van toestanden die men de **koëxistentielijn** zou kunnen noemen.

Ter kompletering van de zo meteen te noemen analogie met de thermodynamika, noemen we nog een

Probleem C

Welke verhouding tussen m' en m'' heerst in de evenwichtstoestand?

Tengevolge van het feit dat de ρ's niet van de m's afhangen, is deze verhouding onbepaald. Ze zou bepaald zijn, wanneer men b.v. als nieuwe eis stelde, dat de totale hoeveelheid produkt of de totale hoeveelheid 1 of 2 een bepaalde grootte moet hebben.

De hier gegeven formules zijn nu volkomen identiek met thermodynamiese, wanneer men verstaat onder

ξ_1 de entropie van de massaeenheid van een stof

---

[41]) Vgl. b.v. J. GOUDRIAAN JR., Diss. Delft, 1922. J. v. GELDEREN, Voorlezingen over tropisch-koloniale staathuishoudkunde, § 1 (bev. rubber).

ξ_2 het volume en
$\Psi(\xi_1\ \xi_2)$ de inwendige energie daarvan;
y_1 de negatieve temperatuur
y_2 de druk.
Dan wordt „probleem *A*" de vraag hoe temperatuur en druk afhangen van volume en entropie in een evenwichtstoestand van de betr. stof. Daarbij is dan ρ de thermodynamiese potentiaal, die immers bij konstante y_1 en y_2 tot een extremum wordt. Het „biezondere geval" komt overeen met het geval van de mogelikheid van twee fazen van dezelfde stof. „Probleem *B*" vraagt naar de koëxistentie-voorwaarde. Daarbij is b.v.

m' de massa van bv. de vloeibare
m'' die van de dampvormige faze.
In de evenwichtstoestand wordt
w de totale thermodynamiese potentiaal tot een extremum, en dit is het geval wanneer de thermodynamiese potentialen per massaeenheid ρ' en ρ'' gelijk zijn.

Koëxistentie is zodoende alleen mogelik als er tussen druk en temperatuur een verband (102) bestaat, bekend als de dampspanningskromme.

„Probleem *C*" herinneert er aan dat elke verhouding tussen de massa's der twee fazen voor kan komen en dat die verhouding slechts dan bepaald is als naast de totale massa ook nog gegeven is de totale inwendige energie, of het volume of de entropie.

Tengevolge van deze overeenstemming zijn alle algemene konklusies uit de natuurkundige vergelijkingen ook toepasselik op het besproken ekonomiese geval, bv. de reciprociteitsbetrekking:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1}$$

welke ons dus in staat stelt de verandering van ξ_2 ten gevolge van y_1-verandering te berekenen uit de verandering van ξ_1 tengevolge van y_2-verandering.

24 — Nivelleringstheorema's

Een grote rol spelen in de ekonomie de bovengenoemde (blz. 45) *nivelleringstheorema's*. Veelal zijn de omstandigheden waaronder zij optreden aldus te formuleeren:

De ofelimiteitsfunktie $\omega(x_1 \ldots . x_n)$ tot een maximum te maken onder de nevenvoorwaarde

$$x_1 + x_2 + \ldots . + x_n = \text{const.}$$

De oplossing volgens de multiplikatoren-methode van Lagrange levert:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \lambda \quad \text{of} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \ldots . = \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \qquad (103)$$

„nivellering der grensnuttigheden".

We willen op dit theorema voor enkele speciale gevallen iets nader ingaan, en zullen in 't biezonder de twee volgende gedaanten van ω onderscheiden

$$\omega = \sum_1^n i \int_o^{x_i} y_i\,(x_i)\,dx_i \tag{1}$$

De formules (103) leveren dan:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n \tag{104}$$

dus „nivellering van de y_i".

Voorbeeld: Verdeling van produktieve krachten over verschillende takken van produktie.

x_i de hoeveelheid arbeid (of ook kapitaal) besteed voor produktie voor de behoefte i;

y_i de **meeropbrengst,** van de laatste (kleine) eenheid arbeid (ev. kapitaal).

ω is dan inderdaad de totale opbrengst naar welks maximum gestreefd wordt.

Verdeling van produktieve krachten over verschillende takken heeft dus zó plaats, dat de meeropbrengsten der laatste eenheden — de „grens-meeropbrengsten per eenheid" — zich nivelleren.

$$\omega = \sum_1^n i\, y_i\,(x_i)\,.\,x_i \tag{2}$$

De formules (103) leveren dan:

$$y_1 + x_1 \frac{dy_1}{dx_1} = y_2 + x_2 \frac{dy_2}{dx_2} = \ldots. \tag{105}$$

dus nivellering van de aangegeven vormen, niet van de y_i.

Voorbeelden

a) Verdeling van produktieve krachten (zie boven).

x_i de hoeveelheid arbeid (of kapitaal) besteed voor produktie voor de behoefte i (van het goed i).

y_i de **gemiddelde** opbrengst per eenheid.

ω is dan wederom de totale opbrengst.

De gemiddelde opbrengsten worden dus niet genivelleerd. Voor het geval men met kapitaalsverdeling (belegging in verschillende takken) te doen heeft, betekent y_i bv. de hoogte van het dividend.

De dividenden zullen zich dus, ook bij vrije beweeglikheid van het kapitaal **niet nivelleren,** en de vgln. (105) doen zien, dat de afwijkingen daarvan des te belangrijker zullen zijn, naarmate de x_i groter zijn, dus b.v. naarmate grotere kapitalen onder eenzelfde kontrolerende macht staan. In 't algemeen zijn de dy/dx negatief; de evenwichts-y_i zullen dus hoger zijn in een elastiese dan in een niet-elastiese tak van produktie, aangezien voor de laatste $\frac{dy}{dx} = 0$ is.

b) V e r k o p e n o p v e r s c h i l l e n d e m a r k t e n.

x_i de hoeveelheden van één goed, verkocht door eenzelfde subjekt op elk der markten i.

y_i de prijs die daar te bedingen is bij een aanbod van x_i.

Op dit geval zijn onze formules ook toepasselik, waarmee aangetoond is, dat **nivellering der prijzen** niet het voordeligst voor het subjekt is. De staties-ekonomiese mogelikheid van **dumping** is hiermee verklaard.

Gemakkelik is in te zien, dat ook voor het *kopen* op verschillende markten hetzelfde geldt: het is niet ekonomies, zoveel op elke markt te kopen, dat de prijzen gelijk geworden zijn.

25 — Extremum van enkelvoudige integralen

Slechts in zeer enkele publikaties worden ekonomiese vraagstukken wiskundig behandeld, waarin naar het extremum van een integraal wordt gevraagd [42]). Het komt ons voor dat er toch inderdaad vraagstukken zijn waarin deze wijze van behandelen aangewezen is. De volgende beschouwingen mogen dit aannemelik maken.

Opdat een ekonomies vraagstuk zich in de vorm van een variatieprobleem laat brengen, moeten blijkbaar de volgende voorwaarden vervuld zijn:

1. Er moet, zoals we hier steeds veronderstelden, slechts één ofelimiteitsfunktie in optreden;

2. Deze moet behoorlik benaderd kunnen worden door een bepaalde integraal;

3. Van de grootheid die als funktie van de onafhankelik veranderlike gevraagd wordt, moet ook de afgeleide voorkomen in de integrand;

4. Deze gevraagde grootheid moet aan de randen gegeven waarden bezitten (of er moet aan de natuurlike randvoorwaarden voldaan zijn).

Wat de eerste voorwaarde betreft herinneren we er de lezer aan dat daaraan voldoen niet alleen de vraagstukken waarin slechts één persoon optreedt, die zich bevindt tegenover gegeven omstandigheden, doch ook ieder probleem waarin één georganiseerde groep optreedt, en elk monopolievraagstuk.

Aan de tweede voorwaarde is zeer zeker voldaan voor een belangrijke kategorie van vraagstukken, nl. diegene waar de ofelimiteit is de winst, gedurende een zeker tijdvak gemaakt. Deze totaalwinst is de som van de winsten in de achtereenvolgende tijdselementen van dat tijdvak gemaakt (eventueel gekorrigeerd met een rentefaktor) en kan daarom, zodra een groot aantal tijdselementen optreedt, met grote benadering door een integraal over de tijd worden beschreven.

Waar zodoende gesproken wordt over het verloop van bepaalde grootheden met de tijd, zijn het dus speciaal **dynamiese** problemen die op deze wijze beschreven worden.

---

[42]) Bv. E v a n s, Proc. N.A.S. **11** (1925) blz. 90; C. F. Roos, Proc. N.A.S. **13** (1927), blz. 281 welke echter buitengewoon theoreties gehouden zijn.

Wat de derde voorwaarde betreft, hieraan wordt m.i. voldaan door o.a. de volgende drie kategorieën van vraagstukken:

a) zulke waarbij rekening gehouden wordt met **voorraden;** noemt men deze x, dan stelt $\dot{x}$ het dagelikse produktiesurplus voor, dat in de winst inderdaad voorkomt;

b) zulke waarbij rekening gehouden wordt met de extrakosten welke een **verandering** der dagelikse produktiekwanta meebrengt; is zo'n kwantum x. dan is de verandering $\dot{x}$;

c) zulke waarbij rekening gehouden wordt met de **vertraging** welke er tussen verschillende ekonomiese grootheden bestaat; is $x\ (t)$ één zo'n grootheid, dan is de andere vaak $f\ [x\ (t - \vartheta)]$, wat in sommige gevallen voldoende benaderd kan worden door $f\ [x - \vartheta\dot{x}]$.

Aan de vierde voorwaarde wordt voldaan door **periodieke problemen,** waarvan vooral interessant zijn problemen betrekking hebbende op de aanpassing aan **seizoen-** en **konjunktuurschommelingen** [43]), en verder door problemen waar doelbewust naar een zekere (nieuwe) evenwichtsstand wordt gestreefd.

In het volgende willen we een greep doen uit de problemen die aan bovenstaande eisen voldoen en wel voorbeelden geven van elk der drie onder 3° genoemde soorten. Problemen waarin andere onafhankelik veranderliken dan de tijd voorkomen, hoewel zeer goed denkbaar, laten we buiten beschouwing.

26 — Voorraadproblemen

Beschouwen we het volgende probleem:

Een onderneming verkoopt elke tijdseenheid een hoeveelheid ξ van de door haar geproduceerde waar tegen een prijs $p\ (\xi, t)$ die dus van ξ en van de tijd moge afhangen. Daarnaast houdt ze een voorraad x, wat elke tijdseenheid de kosten $K\ (x, t)$ meebrengt, welke eventueel ook van de tijd afhangen. Dientengevolge bedraagt de produktie per tijdseenheid $\xi + \dot{x}$. De produktiekosten daarvan noemen we $k\ (\xi + \dot{x}, t)$.

Gevraagd zijn x en ξ als funkties van de tijd t.

De oplossing zal geleverd worden door die x en ξ die over een zeker tijdvak T zo groot mogelik maken de winst:

$$w = \int_o^T dt\ \{\xi\ p(\xi, t) - K\ (x, t) - k\ (\xi + \dot{x}, t)\} \qquad (106)$$

waarbij T voldoet aan de boven genoemde vierde voorwaarde, dus b.v. de periode van een seizoen- of konjunktuurschommeling is. Noemen we het eerste argument van k zolang y, dan is de oplossing gegeven door:

$$-\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \qquad (107)$$

---

[43]) Althans voor het geïdealiseerde beeld ervan dat men als grondslag voor diskussies over stabilisatie bv. moet aannemen.

$$p + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \qquad (108)$$

Om de waarde van deze vgln. nader te belichten, beschouwen we in de eerste plaats twee **grensgevallen:**

I. $K(x, t) \equiv 0$: voorraadvorming wordt op geen wijze belemmerd. Dan wordt (107):

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \text{konst.} = c$$

d.w.z. er wordt zo geproduceerd, dat op elk ogenblik de grenskosten konstant zijn; wat, bij afhankelikheid van k van t, nog niet betekent, dat er steeds evenveel geproduceerd wordt; verder:

$$p + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - c = 0$$

d.w.z. de verkochte hoeveelheden worden gevonden door aan te nemen dat de produktieprijs gelijk aan deze konstante grenskosten is. Bevat bv. $p(\xi, t)$ de tijd niet expliciet, dan is ξ konstant.

II. Geen voorraden kunnen gehouden worden. Dit staat gelijk met het vooropstellen van $x = \dot{x} = 0$ waarmee de eerste vgl. vervalt en de tweede overgaat in de bekende vergelijking voor voorraadloze produktie, die zo vaak gebruikt wordt om de monopolieprijs te bepalen, voor 't geval dat ξ het gehele aanbod voorstelt.

De volgende gevallen schijnen nog interessant:

III. De drie termen van de integrand zijn **expliciet afhankelik** van t, en wel een **periodieke funktie** van t. De vgln. stellen ons dan in staat tot een nadere analyse van **seizoenschommelingen,** of lichten ons in omtrent de **konjunktuurpolitiek** van een onderneming die (of een groter produktiekomplex dat) t.o.v. het geheel der maatschappij klein is [44]).

Voor een systematiek van de seizoenschommelingen is het aanbevelenswaardig de volgende indelingsprincipes te gebruiken:

1°. *a*) alleen $p(\xi)$ hangt van de t af: seizoenafhankelikheid van de **behoefte:** bv. steenkool.

b) alleen $k(\xi + \dot{x})$ hangt van de de t af: seizoenafhankelikheid van de **produktieomstandigheden:** landbouw.

c) gemengde gevallen.

2°. Voorraadvorming al dan niet mogelik (melk tegenover tarwe) (vgl. de onder I en II genoemde gevallen).

Het zal de lezer niet moeilik vallen de biezondere eigenschappen van elk dezer gevallen uit de formules af te lezen. Op een enkele konklusie willen we, bij wijze van voorbeeld, de aandacht vestigen.

---

[44]) Zodat het konjunktuurverloop van p, K en k als niet beinvloedbare funktie van t mag vooropgesteld worden.

Elimineert men $\frac{\partial k}{\partial y}$ uit (107) en (108), dan vindt men:

$$K'(x) = \frac{d}{dt}\left(p + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi}\right). \tag{109}$$

Voor het veel voorkomende geval, dat $\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0$ gerekend kan worden — de produktie van de betr. onderneming is klein t.o.v. de gehele vraag — staat hier:

$$K'(x) = \dot{p} \tag{110}$$

Men kan nu veilig aannemen dat de voorraadkosten $K(x)$ ruwweg voldoen aan: $\frac{d^2K}{dx^2} > 0$ — een diskussie daarvan zou hier te veel plaats innemen — en dan volgt dus uit (110) b.v., dat de voorraad zijn maximum bereikt als p zijn grootste stijging heeft en zijn minimum als p zijn grootste daling ondervindt; in goede overeenstemming met wat eenvoudige redenering zou doen verwachten.

Overigens is formule (110) een voorbeeld voor het door KARSTEN gepropageerde „kumulatief verband" tussen konjunktuurgrootheden [45]).

IV. De integrand is niet expliciet afhankelik van de tijd. Interessant is o.i. de vraag: **zijn er in dit geval toch periodieke oplossingen mogelik?** Dit toch zou o.a. betekenen dat **stabilisatie van een** voor het beschouwde produktiekomplex **endogene konjunktuur ongewenst** is.

Het antwoord wordt het beste gegeven door het volgende speciale voorbeeld: kiest men:

$$K(x) \equiv A + Bx + \tfrac{1}{2} Cx^2 \qquad p = P - Q\xi$$
$$k(y) \equiv a + by + \tfrac{1}{2} cy^2$$

dan komt er als oplossing $x = x_0 + z$ als z voldoet aan

$$z = \frac{2cQ}{(2Q + c)C} \ddot{z}.$$

Wanneer $\frac{cQ}{(2Q + c)C} < 0$ levert dit een periodieke oplossing, waarvan de amplitude slechts beperkt wordt door de overweging dat de aangenomen benaderingen juist moeten blijven.

Interessant is nog dat de grootheden A, B, a, b, en P op de periode van die schommeling geen invloed hebben.

27 — Wrijvingsproblemen

Onder deze naam willen we samenvatten die problemen waarbij rekening gehouden wordt met de kosten welke **veranderingen** in de produktie per

---

[45]) Journ. of the Amer. Stat. Ass. Maart 1924, blz. 14.

tijdseenheid meebrengen — door nodig geworden uitbreiding van installatie in de eerste plaats, en daarnaast door andere onkosten verbonden aan produktieuitzetting of -inkrimping.

Is van een onderneming

x de produktie per tijdseenheid en dus

$\dot{x}$ de verandering per tijdseenheid in die produktie, dan is in 't algemeen de winst in een zeker tijdperk:

$$W = \int_o^T w(x, \dot{x}, t)\, dt \tag{111}$$

als $w\ (x, \dot{x}, t)$ de winst per tijdseenheid is.

Het produktieplan voor de periode $0 < t < T$ — verondersteld, dat aan de randvoorwaarden voldaan is — wordt dus

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial w}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{112}$$

Deze vgl. geeft dus aan, hoe de aanpassing van de produktiekwantiteit aan veranderende omstandigheden (aangegeven door de aanwezigheid van t in de funktie w) plaats heeft, als rekening gehouden wordt met de „veranderingskosten". Het is doelmatig deze of te scheiden van de overige termen die in w voorkomen, waarom we schrijven:

$$w(x, \dot{x}, t) = \varphi(x, t) - \psi(x, \dot{x}, t); \qquad \psi = 0 \text{ voor } \dot{x} = 0 \tag{113}$$

We willen omtrent de wijze van aanpassing nog een enkele nadere konklusie afleiden voor het geval, dat t niet expliciet voorkomt, en daartoe bovendien gebruik maken van de veronderstellingen dat

1°. $$\frac{d}{d\dot{x}}\left(\frac{\psi}{\dot{x}}\right) > 0 \tag{114}$$

d.w.z. dat uitbreiding per eenheid meer kost dan inkrimping kan opbrengen.

en 2°. φ één maximum bezit (voor $x = x_o$), zoals dat bijna steeds het geval is.

Uit het niet expliciet voorkomen van t volgt, dat een eerste integraal van de diff. vgl. is

$$\varphi - \psi + \dot{x}\,\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} = K \tag{115}$$

Nu laat zich aantonen, — we kunnen op deze diskussie hier niet ingaan, als liggend te ver buiten het terrein van onze beschouwingen — dat er slechts één waarde van K is die een oplossing levert welke W tot een maximum maakt; alle andere waarden maken W tot een minimum. Voor de ekonomie is dus alleen deze K bruikbaar [46]; zijn waarde is $\varphi(x_o)$. Hieruit kan men

---

[46]) De hieruit volgende beperking van het aantal oplossingen tot ∞^1 maakt, dat men slechts de aanvangs-x kan geven, niet de aanvangs-$\dot{x}$, wat m.i. echter geen bezwaar is.

tenslotte afleiden, dat **de aanpassing geschiedt zonder schommeling;** men toont nl. gemakkelik aan dat $\dot{x} = 0$ wordt pas dan wanneer ook alle hogere afgeleiden nul worden. De achtergrond van deze uitkomst is, dat **stabilisatie** de beste konjunktuurpolitiek is voor elk georgasaniseerd produktiekomplex waarvan de winst opgebouwd is als in (111), (113) en (114), werd vastgesteld.

28 — Vertragingsproblemen

Bij ettelike onderzoekingen op konjunktuurstatisties gebied is tussen twee grootheden x en y het volgende verband gevonden: [47]).

$$y\ (t) = f\ [x(t - \vartheta)]$$

waarbij dan nog vaak f nagenoeg lineair was. Bv.

x: groothandelsprijzen

y: lonen of rente.

Bij de behandeling van het vraagstuk of stabilisatie van dergelijke grootheden nuttig is komt men tot detailproblemen van de struktuur der volgende slechts als voorbeelden bedoelde problemen:

I. Gegeven: de schommelingen van kleinhandelsprijzen, bedrijvigheid en uurloon zijn in korrelatie; de kleinhandelsprijzen volgen de bedrijvigheid na een tijd η, de lonen volgen de kleinhandelsprijzen na een tijd ϑ. In formules:

kleinhandelsprijzen: $p\ (t)$

bedrijvigheid: $u\ (t) = A + \alpha p\ (t + \eta)$

loon: $l\ (t) = B + \beta p\ (t - \vartheta)$

Gevraagd: bij welke beweging der prijzen is de koopkracht van de totale loonsom

$$\int_0^T \frac{ul}{p}\, dt$$

genomen over een gehele konjunktuurperiode, de grootste [48]) ?

De oplossing van dit probleem voert ons tot een variatieprobleem, wanneer we de benadering invoeren:

$$p(t + \eta) = p + \eta \dot{p}$$

wat voor tijden ε die in vergelijking tot T klein zijn, geoorloofd is. Voor η en ϑ is dit het geval. ϑ is hoogstens $\frac{1}{7}$ van T, η is veel kleiner. Het probleem wordt nu:

$$\delta \int_0^T \frac{dt}{p}\ \{A + \alpha(p + \eta\dot{p})\}\ \{B + \beta(p - \vartheta\dot{p})\} = 0$$

---

[47]) „Korrelatie met lag", Zie bv. WAGEMANN, Konjunkturlehre. Vgl. ook MORGENSTERN, Wirtschaftsprognose, blz. 61.

[48]) De achtergrond van dit probleem is: heeft de arbeidersklasse belang bij stabilisatie of niet?

Daar hierin de t niet expliciet voorkomt, is een eerste integraal:

$$\frac{AB}{p} + \alpha B + \beta A + \alpha\beta p + \frac{\alpha\beta\vartheta\eta}{p}\ \dot{p}^2 = \text{konst.}$$

Hiervan is de oplossing:

$$p = p_o + \mathfrak{A} \sin \frac{t - t_o}{\sqrt{\vartheta\eta}}$$

waarbij

$$p_o{}^2 = \mathfrak{A}^2 + \frac{AB}{\alpha\beta}.$$

Dit stellen golven voor met een periode van $2\pi\sqrt{\vartheta\eta}$, d.i. korter dan de werkelike konjunktuurgolven. Vraagt men nu uitsluitend naar die oplossingen die tevens de periode van de werkelike konjunktuurgolven hebben, dan blijft slechts het grensgeval over: $\mathfrak{A} = 0$,

waarbij dus $p = \sqrt{\frac{AB}{\alpha\beta}}$ en waarbij dus stabilisatie bestaat.

II. Gegeven: Het loon l past zich vertraagd aan bij de prijs p van de produkten van een zekere onderneming:

$$l = f\,[p(t - \vartheta)]$$

De omzet V van deze onderneming, hangt, behalve van de prijs p die ze vraagt, ook af van de loonstandaard van haar arbeiders, die gedeeltelik als kopers optreden:

$$V = V(p, l) = v(p, p - \vartheta\dot{p})$$

wanneer we wederom $p\ (t - \vartheta)$ benaderen door $p - \vartheta\dot{p}$.

Gevraagd: de voor deze onderneming voordeligste prijspolitiek.

Veronderstellen we dat de overige naast de lonen voorkomende produktiekosten konstant blijven, dan kunnen we voor de in het tijdvak $0 < t < T$ te maken winst schrijven:

$$W = \int_o^T dt\ w(p,\ p - \vartheta\dot{p}).$$

Noemen we het tweede argument van w hierbij q, dan wordt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial q} + \vartheta\dot{p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\right) - \vartheta^2\ \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\ \ddot{p} = 0.$$

Veronderstelt men weer dat in w de tijd niet expliciet voorkomt, dan laat zich weer de integraal vinden

$$w + \vartheta\dot{p}\ \frac{\partial w}{\partial q} = k$$

en als konklusie van een wiskundige diskussie, waarbij gebruik gemaakt wordt van de onderstelling, dat $w\,(p, \dot{p})$ één maximum heeft, komt men nu tot de konklusie: voor het geval dat in de omgeving van dat maximum $\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} < 0$ is stabilisatie het voordeligst; voor $\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} > 0$ is schommeling het voordeligst.

De grootheid die hier de doorslag geeft is dus de richting waarin de loongevoeligheid van de winst verandert bij toenemend loon.

Problemen als het hier schetsmatig aangegevene worden nodig zodra men zich een idee wil vormen over het nut van stabilisatie voor de maatschappij in zijn geheel. Bij diskussies over dit onderwerp [49]) wordt meermalen de invloed van buiten een bedrijf staande faktoren — zoals in ons voorbeeld het loonnivo — als onveranderlik beschouwd. Zodra men grootere komplexen beziet, is dit echter niet geoorloofd.

Inplaats van via het loonnivo kan ook via de rentestand, en nog vele andere faktoren, langs een omweg het prijsnivo ,,terugwerken''; het vraagstuk van de konjunktuurpolitiek der centrale bank bevat eveneens volkomen analoge elementen.

We beëindigen hier de voorbeelden van variatieproblemen in de ekonomie en gaan ter wille van de omvang van deze beschouwingen niet in op de vraag of ook minimumproblemen van meervoudige integralen in de ekonomie optreden.

---

[49]) Vgl. Dr. A. MÜLLER, Ökon. Theorie der Konjunkturpolitik, Leipzig 1926.

SCHEMA VAN DE GEBRUIKTE VOORBEELDEN *)

Paragraaf	A. Elastic.	B. Mech.	C. Thermod.	D. Optika	E. Elektrostat	Elektrodynamika F. Stroomnet	Elektrodynamika G. Veldvgln.	Elektrodynamika H. Bew. vlgn.	Hfdst.
2 Probleem	Statika	Dyn.	Evenw.	Straleng.	Ev. geleid.	Stat. verd.	Niet-hom.		
3 Randvw.	Randbind.	Vaste $q(p)$	—	—	—	—	Veld 0		
4 $\nu \geqq 2$	Blok, vlies	Königsb.	—	—	—	—	●	Koher.	
4 $\nu = 1$	Draad	Lagrange	—		—	—	—	Inkoh.	
5 $\nu = 0$	Diskreet	Statika	v, u konst.	Fermat	Lad.konst.	Min.warmte	—	—	I
6 Hogere afg.	Buiging	Königsb.	—	—	—	—	—	El.eigenveld	
7 Kwadr. F	Hooke	●	—	—	●	●	●		
7 $F = \Phi - \Sigma Qq$	Uitwendig krachtveld		p, T konst.		Pot. konst.	Geg. e.m.k.	●		
8-9 Rec. betr.	—	Helmh.	Maxwell	Hamilton, Bruns	Rec. betr. tussen intens. en kwant. Id. eindig		Lorentz		II
10 Kwad. F.	Rayleigh		—	—					
11-16 Andere f.	Kanon. vorm	Routh Hamilton Hilbert Kl. werk.	v, $u \rightarrow p$, T		lad. → pot.	$I \rightarrow K$	Niet-hom. en hom. vgln.		III
19 $\delta \Phi = -\delta\overline{\Phi}$		Cycl. st.	—	—	●	●	Bessel-H.		Ah.
20 Niveller.		Beh. v. en.	$p_1 = p_2$ enz.	Breking	Niv. pot.	Niv. potv.			

*) Ter wille van de overzichtelikheid is er naar gestreefd elk voorbeeld zoveel mogelik door een enkel — voor de ingewijde lezer begrijpelik — woord aan te geven. De letters vóór de vb. in de tekst korresponderen met dit schema.
— uiteraard onmogelik. ● alle problemen in deze kolom behoren tot de links genoemde kategorie.