Dr J. TINBERGEN

MINIMUMPROBLEMEN IN DE NATUURKUNDE EN DE EKONOMIE

MINIMUMPROBLEMEN IN DE NATUURKUNDE EN DE EKONOMIE

DOOR

Dr J. TINBERGEN

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXIX

INHOUD

Blz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I — FORMULERING DER PROBLEMEN; NATUURKUNDIGE VOORBEELDEN 3

§ 1 Identiteit voor ΔI 3
§ 2 Probleemstelling en oplossingsvergelijkingen 4
§ 3 Randvoorwaarden 9
§ 4 Invloed van het aantal onafhankelik veranderliken; het geval $\nu = 1$ 10
§ 5 Het geval $\nu = 0$ 14
§ 6 Invloed van de orde der afgeleiden 18
§ 7 Enige speciale vormen van F 18

HOOFDSTUK II — RECIPROCITEITSBETREKKINGEN 21

§ 8 Inleiding; geval $\nu = 0$: funktie van een eindig aantal veranderliken 21
§ 9 Gevallen $\nu > 0$: integralen 23
§ 10 Kwadratiese funkties 27

HOOFDSTUK III — ANDERE FORMULERINGEN VAN DE BESCHOUWDE PROBLEMEN ALS MINIMUMPROBLEMEN 29

§ 11 Inleiding; funktie van een eindig aantal veranderliken 29
§ 12 Enkelvoudige integralen. Vgln. van Routh; kanoniese vgln. 30
§ 13 Andere formuleringen als minimumproblemen . . . 32
§ 14 Principe van Hilbert en principe van de kleinste werking 34
§ 15 Integrand met hogere afgeleiden; vraagstukken waarbij $F = \Phi - \Sigma Qq$ 35
§ 16 Meervoudige integralen 36

Blz.

AANHANGSEL *A* — *Natuurkundig gedeelte* 41
§ 17 Afleiding van de betrekking voor δs (blz. 9) 41
§ 18 Reciprociteitsbetrekkingen voor kwadratiese Φ . . . 42
§ 19 Betrekkingen van de vorm $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}$ 43
§ 20 Direkte afleiding van een „dynamiese reciprociteitsbetrekking" 44
§ 21 Nivellerings-, behouds- en divergentietheorema's . . 45
§ 22 Voortgezette transformatie der vgln. van Routh . . 46
B — Toepassing van de besproken theorema's op ekonomiese vraagstukken.
(seizoen- en konjunktuurschommelingen) 47
§ 23 Inleiding; problemen met een eindig aantal veranderliken: koëxistentie van ondernemingsvormen . . . 47
§ 24 Nivelleringstheorema's 50
§ 25 Extremum van enkelvoudige integralen: inleiding . 52
§ 26 Voorraadproblemen 53
§ 27 Wrijvingsproblemen 55
§ 28 Vertragingsproblemen 57

OVERZICHT DER BESPROKEN NATUURKUNDIGE VOORBEELDEN. 60

REGISTER 61

LITERATUUR 63

INLEIDING

Het onderwerp van dit proefschrift werd speciaal gekozen met het oog op de analogie die de behandelde natuurkundige problemen waarschijnlik zouden vertonen met zekere ekonomiese problemen, waarop in het aanhangsel wordt gewezen.

Voornamelik is getracht, de in verschillende gebieden der natuurkunde voorkomende vraagstukken van deze soort overzichtelik bijeen te brengen, en de verschillende vormen waarin ze voorkomen naar één gezichtspunt te rangschikken. Daarbij bleek dat bepaalde kunstgrepen slechts voor enkele gebieden gebruikt werden; nagegaan is, wat hun toepassing op de andere gebieden oplevert.

Op vele punten zijn ter verduideliking van de tekst voorbeelden genoemd [1]), waaronder ettelike van algemene bekendheid, terwijl overal gestreefd is naar aansluiting met de literatuur over het betrokken gebied. Daarbij is ter wille van belangstellende lezers op verschillende plaatsen ook literatuur genoemd welke door mij slechts gedeeltelik bestudeerd is.

Onder *minimumvraagstukken* in 't algemeen zullen we in 't volgende alle vraagstukken verstaan, waarbij een zekere grootheid *stationnair* is, in 't midden gelaten, of er inderdaad een *minimum* (of een maximum) optreedt. Het gebruik van deze niet geheel exakte term werd verkozen, omdat in de meeste gevallen, die behandeld worden, inderdaad toch een minimum (of maximum) aanwezig is; en omdat zodoende een wat al te logge terminologie kon vermeden worden. We zien dan ook af van diskussies over de tweede variaties van de betrokken grootheid.

Vele natuurkundige vraagstukken nu worden beschreven door vergelijkingen die tevens de voorwaarden vormen waaronder een zekere grootheid stationnair wordt. We willen volkomen in 't mid-

---

[1]) De letters vóór de voorbeelden korresponderen met het schema op blz. 60.

den laten of dit „streven naar een minimum" in de natuur van de beschouwde problemen ligt (zoals men in elk geval voor ekonomiese problemen geneigd is, aan te nemen) of als een verrassende uitkomst moet opgevat worden; m.a.w. we zullen het niet hebben over de kwestie of er teleologies of kausaal verband optreedt, welke vraag in de vorige eeuwen in het centrum van de belangstelling heeft gestaan [2]). We houden ons in deze beschouwingen voornamelik bezig met de analogieën die de verschillende problemen vertonen tengevolge van hun zelfde formele bouw.

De vergelijkingen die de oplossing van het minimumprobleem leveren (in 't geval van variatieproblemen de zgn. vergelijkingen van EULER) zijn, wat aard en vorm betreft, afhankelik van de funktie die stationnair wordt. Het e e r s t e hoofdstuk bespreekt enige kategorieën die men zodoende kan onderscheiden, en geeft van elk dezer enige natuurkundige voorbeelden.

Uit sommige van de bedoelde kategorieën laten zich onmiddellik zgn. *reciprociteitsbetrekkingen* afleiden; over deze betrekkingen wordt meer in 't algemeen in het t w e e d e hoofdstuk gehandeld.

De vergelijkingen van EULER laten zich door het invoeren van bepaalde nieuwe veranderliken („*momenten*") in de zgn. *kanoniese* vorm en de vorm van ROUTH brengen. Deze transformaties worden in het d e r d e hoofdstuk besproken, waarbij dan tevens minimumproblemen worden aangegeven die direkt deze andere vergelijkingen als vergelijkingen van EULER opleveren.

In een a a n h a n g s e l tenslotte worden enkele der aangeroerde kwesties nog enigszins verder uitgewerkt, terwijl tevens enige toepassingen van het voorgaande op *ekonomiese* problemen worden gegeven.

Waar niet het tegendeel uitdrukkelik vermeld is, is van alle voorkomende funkties verondersteld dat ze kontinu en met hun afgeleiden een voldoend aantal malen differentiëerbaar zijn.

---

[2]) Vgl. HELMHOLTZ, Wiss. Abh. III. blz. 203, PLANCK, Kultur der Gegenw. (Physik), blz. 692; KNESER, Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

HOOFDSTUK I

FORMULERING DER PROBLEMEN; NATUURKUNDIGE VOORBEELDEN

1 — Identiteit voor ΔI

Het is doelmatig, dit hoofdstuk te beginnen met de afleiding van een identiteit, waaromheen we onze verdere beschouwingen kunnen groeperen. We willen transformeren de uitdrukking ΔI wanneer

$$I = \int_G \ldots \int d\omega \, F(q_i, q_{i\lambda}, \xi_\lambda) \tag{1}$$

Hierin betekenen:

ξ_λ $(\lambda = 1 \ldots . \nu)$ de onafhankelik veranderliken van het probleem;

$d\omega = d\xi_1 \ldots . d\xi_\nu$, een element van het ν dimensionale gebied G,

q_i $(\xi_1 \ldots . \xi_\nu)$ $(i = 1 \ldots . n)$ de afhankelik veranderliken; $q_{i\lambda} = \dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_\lambda}$.

De variatie van I denken we ons tot stand gekomen door de volgende twee soorten van variaties:

1°. variaties δq_i en $\delta q_{i\lambda}$ van q_i resp. $q_{i\lambda}$, bij konstante ξ_λ; het is duidelik dat daarvoor geldt:

$$\delta q_{i\lambda} = \frac{\partial \delta q_i}{\partial \xi_\lambda} \tag{2}$$

2°. variatie van het integratiegebied door in plaats van ξ te beschouwen $\xi + \Delta\xi$.

We zullen ter wille van de overzichtelikheid de sommatie over indices der q's aangeven met Σ, die over indices der ξ's met ς.

We voeren verder nog in de notaties:

g voor het randgebied van G;

N voor de „normaal" op dat randgebied naar „buiten";

(N, λ) voor de hoek tusschen N en de positieve richting ξ_λ;

$d\Omega$ voor een element van het gebied g.

Nu is ΔI opgebouwd uit twee delen: een term tengevolge van de variatie van het gebied, en een tengevolge van de variatie der q's:

$$\Delta I = \int_g \ldots \int d\Omega\, F\, \Delta N + \int_G \ldots \int d\omega \left(\sum{}^i \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \sum{}^i \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \delta q_{i\lambda} \right).$$

Onder gebruikmaking van (2) en na partiële integratie wordt dit:

$$\Delta I = \int_g \ldots \int d\Omega\, F\, \Delta N + \int_g \ldots \int \sum{}^i \sum_\lambda d\Omega\, \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \cos(N, \lambda)\, \delta q_i +$$

$$+ \int_G \ldots \int d\omega \sum{}^i \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i} - \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \right\} \delta q_i \qquad (3)$$

In plaats van δq_i gebruikt men soms

$$\Delta q_i = \delta q_i + \sum q_{i\lambda} \Delta \xi_\lambda \qquad (4)$$

d.i. het verschil van de ongevariëerde q voor de ongevariëerde ξ-waarden en de gevariëerde q voor de gevariëerde ξ-waarden. Dan wordt (3):

$$\Delta I = \int_g \ldots \int d\Omega \sum_\lambda \cos(N\lambda)\, \Delta \xi_\lambda \left[F - \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} q_{i\lambda} \right] +$$

$$+ \int_g \ldots \int \sum{}^i \sum_\lambda d\Omega\, \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \cos(N, \lambda)\, \Delta q_i + \int_G \ldots \int d\omega \sum{}^i \left\{ \cdot\, \cdot \right\} \delta q_i \qquad (5)$$

Tenzij anders vermeld zullen we echter steeds veronderstellen dat $\Delta \xi = 0$ waarmee de eerste integraal wegvalt.

---

2 — Probleemstelling en Oplossingsvergelijkingen

Beschouwen we nu het volgende probleem:

De funkties $q_i\,(\xi_1 \ldots \xi_\nu)$ zodanig te bepalen, dat

$$\Delta I = 0$$

voor alle toelaatbare waarden van δq_i.

Toelaatbaar noemen we alle δq_i welke voldoen aan de bij het probleem eventueel gestelde *randvoorwaarden*, d.z. betrekkingen voor de q_i en de $q_{i\lambda}$ in het randgebied g.

We zullen nl. in 't algemeen afzien van de gevallen waarbij de q_i en $q_{i\lambda}$ bovendien moeten voldoen aan zgn. *nevenvoorwaarden*,

d. z. betrekkingen voor de q_i en de $q_{i\lambda}$ in het gehele gebied G. (Zie daarvoor § 5).

In het gebied G zijn dus de δq_i willekeurig en dan kan aan de opgave slechts dan voldaan worden [3]) wanneer in dat gebied de q_i voldoen aan de partiële differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \sum \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} = 0 \tag{6}$$

de zgn. *vergelijkingen van* EULER.

Als voorbeelden noemen we behalve het meetkundige voorbeeld der minimumoppervlakken (vgl. blz. 13) de volgende

---

Natuurkundige Voorbeelden

A — *Evenwicht van een Elasties Kontinuum in een Krachtveld*

Het evenwicht van een dergelijk stelsel is de toestand waarvoor de potentiële energie een minimum is. Verstaat men onder:

ξ_λ ruimtekoördinaten;

G het gebied dat door het kontinuum wordt ingenomen;

q_i de uitwijking uit een zekere nulstand van het element met de koördinaten ξ;

dan laat de potentiële energie zich steeds op de vorm I brengen. In 't algemeen zal daarbij F de vorm hebben

$$F \equiv F_1 (q_{i\lambda}, \xi_\lambda) + F_2 (q_i, \xi_\lambda)$$

waarbij F_1 de elastiese energie is en F_2 de potentiële energie t.o.v. het uitwendige krachtveld.

Een fundamentele eigenschap van F_1 is, dat daarin de $q_{i\lambda}$ slechts voorkomen in de kombinatie $q_{i\lambda} + q_{\lambda i}$ [4]).

Is het kontinuum isotroop, dan zal in F_1 elke ξ ontbreken en zullen de $q_{i\lambda}$ er symmetries in voorkomen.

Voldoet het kontinuum aan de wet van Hooke, dan zal F_1 in de $q_{i\lambda}$ kwadraties zijn.

Zijn de uitwendige krachten gegeven en gelijk aan K_i (ξ), dan laat F_2 zich schrijven: $\Sigma\ K_i q_i$.

---

[3]) Vgl. HADAMARD, Leçons sur le calcul des variations, blz. 64; BOLZA, Vorl. über Var. rechnung, blz. 25.

[4]) Vgl. LOVE, Theory of Elasticity, Ch. III, blz. 100, vlg. (11); KIRCHHOFF, Mathem. Physik I, blz. 110 e.v.

Is aan al deze eigenschappen voldaan, dan heeft F dus b.v. de speciale gedaante:

$$F \equiv \tfrac{1}{2}A \sum_i q_{ii}^2 + 2B\,[-\sum_{i,k} q_{ii}\,q_{kk} + \tfrac{1}{4}\sum_{i,k}(q_{ik}+q_{ki})^2] + \sum_i K_i q_i \quad (7)$$

waarbij $\sum_{ik}$ betekent dat elk der kombinaties i, k eenmaal genomen moet worden.

B — *Bewegingsvergelijkingen van de mechanika* [5])

Is voor een mechanies stelsel

ξ de tijd,

q_i $(i = 1 \ldots . n)$ de vrije koördinaten, d.w.z. een stelsel parameters, dat juist voldoende is om de mogelike toestanden van het stelsel te beschrijven, en waarvan we veronderstellen dat ze samenhangen met de Cartesiaanse koördinaten x_j volgens vergelijkingen van de „holonome" vorm:

$$x_j = x_j\,(q_1 \ldots . q_n, \xi), \quad (8)$$

T $(q_i, \dot{q}_i, \xi)$ de kinetiese energie,

U (q_i, ξ) de potentiële energie van de krachten die bij een virtuele verplaatsing arbeid verrichten — waarvan het bestaan dus vooropgesteld wordt [6]) — en ten slotte

$L \equiv T - U$ de zgn. „*funktie van* LAGRANGE", dan zijn de bewegingsvgln. te schrijven in de vorm

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

de zgn. *vergelijkingen van* LAGRANGE, welke dus te beschouwen zijn als de vgln. van EULER voor het probleem

$$\Delta I = \Delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi\, L = 0$$

B'. *Bewegingsvergelijkingen van een elasties kontinuum*

Deze verkrijgen we door kombinatie der twee vorige voorbeelden; nemen we nl.

$$F = -U\,(q_i, q_{i\mu}, \xi_\lambda) + T(q_i, q_{i4}, \xi_\lambda),$$

---

[5]) Vgl. APPELL, Traîté de mécanique rationnelle II, blz. 213; WHITTAKER, Analytical Dynamics, blz. 38.

[6]) Voor de voorwaarden waaraan de in het probleem optredende krachten moeten voldoen, vgl. b.v.: MAYER, Leipz. Ber. **74** (1898); HIRSCH, Math. Ann. **50** (1898), 429; WHITTAKER, Anal. Dyn. § 31; NORDHEIM, Handb. der Physik V, § 10, 14.

waarbij $\mu = 1, 2, 3$ en $\lambda = 1, 2, 3, 4$, terwijl $\xi_1 \ldots \xi_3$ ruimtekoördinaten zijn en ξ_4 de tijd, dan is het duidelik, dat deze F de Lagrangefunktie van een elasties kontinuum van drie dimensies kan zijn .

G — *Elektrodynamiese veldvergelijkingen* [7])

Bedienen we ons van de notatie van MINKOWSKI, en verstaan we onder:

$\xi_1 \ldots . \xi_4$ de drie ruimte- en de tijdkoördinaat van een wereldpunt ($\xi_4 = ict$);

$x_1 \ldots . x_4$ idem van een elektries geladen materieëlement;

ρ en μ resp. rustladingsdichtheid en rustmassadichtheid van een element $dx_1 \ldots . dx_4$, c de lichtsnelheid,

τ de „eigentijd", welke voldoet aan $d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}\sum_1^4 {}_i\, dx_i^2$

$s_i = \frac{\rho}{c}\frac{dx_i}{d\tau}$ [8]) de stroomkomponenten van de elektriciteit,

A_i de komponenten van de vektorpotentiaal,

$F_{ik} = -F_{ki}$ de veldsterkten ($iE_k = F_{4k} = -F_{k4}$; $H_3 = F_{12} = -F_{21}$ enz.), dan luiden de veldvergelijkingen van de elektrodynamika, zooals men weet:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} \qquad (9) \qquad\qquad s_i = \sum_k \frac{\partial F_{ki}}{\partial \xi_k} \qquad (10)$$

Op verschillende wijzen kan men deze vergelijkingen verkrijgen uit minimumprincipes. Voor de door ons te volgen systematiek is het het fraaist om hier te vermelden het principe:

$$\delta I = \delta \iiiint d\xi_1 \ldots . d\xi_4 \left[-\Sigma s_i A_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] = 0 \quad (11)$$

waaruit men onder vooropstelling van vgln. (9) de vgln. (10) verkrijgt, door de A_i te beschouwen als afhankelik veranderliken en de s_i als gegeven funkties van de onafhankelik veranderliken ξ_i.

Men kan ook (9) èn (10) uit één principe afleiden; hierop komen wij nader terug in § 16.

---

[7]) Vgl. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr. 1903, blz. 126; LARMOR, Aether and Matter, blz. 84, 94; LIVENS, Phil. Mag. **32** (1916), blz. 195; LIVENS, Theory of Electricity, blz. 568.

[8]) De vierde komponent is dus $-ic\bar{\rho}$ waarin $\bar{\rho}$ de „bewegingslading" is.

H — *Bewegingsvergelijkingen voor materie in een elektromagneties veld* [9]).

Beschrijven we de geschiedenis van een inkoherent kontinuum elektries geladen materie met de koördinaten x_i boven gedefiniëerd, nu echter opgevat als funktie van ξ, η, ζ, τ waarbij ξ, η, ζ de beginkoördinaten en τ de eigentijd van het beschouwde element aangeven, dan luiden de bewegingsvergelijkingen:

$$\mu \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau^2} = \sum_k s_k F_{ki}$$

Deze laten zich afleiden uit een minimumprincipe

$$\delta I = \delta \iiiint d\xi d\eta d\zeta d\tau \, (L - \sum_i s_i A_i) = 0 \qquad (12)$$

waarin

$$L\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial \tau}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\, \mu(\xi, \eta, \zeta) \sum_1^4{}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \tau}\right)^2$$

de Lagrangefunktie, A_i als bekende funktie van x_i wordt beschouwd, en de x_i worden gevariëerd.

Zoals men ziet komen in de integrand slechts afgeleiden van x_i naar τ voor; zodat het in wezen het extremum van een enkelvoudige integraal is, dat beschouwd wordt. Door de integraal te beperken tot het klein gedachte volume van één elektron waarvoor $\iiint d\xi \, d\eta \, d\zeta \, \mu = m$ verkrijgt men dan ook de bewegingsvgln. van dat elektron in een gegeven veld met verwaarlozing van de reaktie van het eigen veld.

Had men niet een inkoherent doch bv. een elasties kontinuum beschouwd, dan zouden in L ook afgeleiden naar ξ, η en ζ voorkomen.

Veldvergelijkingen en bewegingsvergelijkingen uit één minimumprincipe [10])

Hoewel de principes (11) en (12) door hun gelijkluidende gemeenschappelike gedeelte $\Sigma\, s\, A$ tot kombinatie uitnodigen is deze zonder meer niet mogelik, omdat de onafhankelik veranderliken verschillend zijn en omdat bovendien de A's de eerste maal als afhankelik veranderliken en de andere maal als bekende funkties van de afhankelik veranderliken opgevat worden.

De kombinatie is wel mogelik op de volgende wijze:

---

[9]) Vgl. H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. K. Ges. Wiss. Gött. 1908, speciaal Anhang.; M. Born, Ann. d. Physik **28** (1909), blz. 571; W. Pauli Jr., Relativitätstheorie, (Enz. der math. Wiss.), § 31.

[10]) Vgl. H. A. Lorentz, Versl. A'dam XXIII (1915), blz. 1073; D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik I, K. Ges. Wiss. Gött. Math. Phys. 1915; Tresling Versl. A'dam XXV (1916) blz. 844; A. D. Fokker, Versl. A'dam XXV (1917) blz. 1067 waarin echter bovendien de gravitatievergelijkingen afgeleid worden.

We nemen een

$$I = \iiiint d\xi_1 \ldots . d\xi_4 \left[L - \sum_i s_i A_i(\xi) + \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] \quad (13)$$

waarbij de onafhankelik veranderliken $\xi_1 \ldots \xi_4$ de bovengenoemde betekenis hebben en waarin nu

$$L \equiv \mu c^2 \sqrt{\Sigma x_{i4}^2}.$$

Als afhankelik veranderliken zijn nu te beschouwen de A_i benevens de x_i. Door variatie van A_i ontstaan op de reeds besproken wijze de veldvergelijkingen (10); door variatie van de x_i de bewegingsvergelijkingen. Daarbij moet men echter gebruik maken van de betrekking (zie aanhangsel, § 17).

$$\delta s_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(s_k \, \delta x_i - s_i \, \delta x_k \right) \quad (14)$$

welke niet door een gewoon funktioneel verband tussen s_i en x_i schijnt vervangen te kunnen worden, zodat van een niet-holonome betrekking kan gesproken worden.

3 — Randvoorwaarden

1. Zijn de q's aan geen enkele beperkende voorwaarde onderworpen, dan geldt de voor het gebied G getrokken konklusie ook voor het gebied g en moet dus ook

$$\underset{\lambda}{\mathrm{S}} \cos(N, \lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \right)_o = 0 \quad (15)$$

wanneer we door de index 0 de waarden in het gebied g aangeven.

Men noemt dit wel met COURANT de *„natuurlike randvoorwaarden"* van het probleem [11]).

2. Een ander uiterste, histories het eerst voorkomende geval, is dat waarin de q's in het gebied g voorgeschreven waarden hebben. Dan zijn de $(\delta q_i)_o = 0$
waardoor de vgl. (15) overbodig worden en vervangen worden door de genoemde randvoorwaarden

$$(q_i)_o = k_i \, (\xi_1 \ldots . \xi_\nu) \quad (16)$$

3. Een kontinue reeks tussengevallen kan men naar COURANT konstrueren door een iets algemener probleem dan het bovengenoemde $\Delta I = 0$ te beschouwen, nl.

$$\Delta I + t\Delta \; I^* = 0$$

---

[11]) R. COURANT, Jahresber. der deutschen Math.-Ver. XXXIV (1925) blz. 90.

waarin $$I^* = \int_g \ldots \int k(q_i, \xi_\lambda)\, d\Omega,$$

$t(\xi_\lambda)$ een parameter voorstelt die van de ξ's der punten van g kan afhangen, en waarbij geen randvoorwaarden gesteld worden. Door geschikte keuze van k kan men bereiken, dat de natuurlike randvoorwaarden van dit probleem:

$$\sum_\lambda \cos.\ (N, \lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}}\right)_o + t\, \frac{\partial k}{\partial q_i} = 0 \tag{17}$$

voor $t = \infty$ de onder 2) genoemde voorwaarden leveren. Daar ze voor $t = 0$ de voorwaarden onder 1) genoemd geven, kan men dus, door t alle tussengelegen waarden te laten doorlopen, een kontinue reeks gevallen als overgang tussen 1) en 2) vinden.

Het hier geschetste procédé laat zich het best illustreren wanneer we de formules toegepast denken op het voorbeeld van het elasties kontinuum.

Nemen we, om de gedachten te bepalen, $\nu = 2$, dan kan I blijkbaar voorstellen de potentiële energie van een elasties vlies, voorzover deze aan de elastiese krachten en de uitwendige oppervlaktekrachten toe te schrijven is. Is dat vlies dan bovendien aan de rand elasties gebonden dan kan de uit deze bindingskrachten voortkomende potentiële energie geschreven worden in de vorm

$$tI^*$$

waar t de vastheid van de binding kan betekenen.

Voor $t = 0$ is er in 't geheel geen binding; bij toenemende t wordt de binding strakker. Physies is nu volkomen duidelik, dat bij toenemende t de oplossing zal naderen tot die van het probleem, waarbij de rand vast is, d.w.z. de q's gegeven waarden hebben.

De randvoorwaarden bij de minimumprincipes der dynamika bespreken we in § 4.

Bij de elektrodynamiese minimumproblemen integreert men gewoonlik over de gehele ruimte, waardoor de in (5) optredende randintegralen automaties nul worden.

4 — Invloed van het aantal onafhankelik veranderliken

Om een overzicht te krijgen van het aantal typen van proble-

men waarvan in dit hoofdstuk sprake is, is het in de eerste plaats doelmatig de invloed op de vgln. (6) na te gaan, die verandering van het aantal ν der onafhankelik veranderliken ξ heeft. Het afnemen van dit aantal heeft, zoals uit de vgln. (1) en (6) blijkt, heeft tengevolge het steeds „armer" worden van het probleem. Het aantal integraties in (1) vermindert, en het aantal termen van de vorm

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}}$$

in (6) vermindert.

Het meest volledige voorbeeld van deze verarming levert het behandelde probleem uit de elasticiteitsleer waar $\nu = 3$ een blok, $\nu = 2$ een vlies en $\nu = 1$ een draad voorstelt.

Van speciaal belang zijn naast het algemene geval de biezondere gevallen $\nu = 1$ en $\nu = 0$.

Het geval $\nu = 1$. Hier hebben we dus te maken met **minimumproblemen van enkelvoudige integralen** van de vorm:

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \; F(q_i, \dot{q}_i, \xi)$$

waarbij dus het gebied G tot een interval $\xi_0 \leqq \xi, \leqq \xi_1$ is geworden, de $q_{i\lambda}$ tot $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{d\xi}$, en het randgebied tot twee punten ξ_0 en ξ_1.

De formule (5) voor ΔI wordt nu:

$$\Delta I = \left[\left(F - \sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) \Delta\xi + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i\right]_{\xi_0}^{\xi_1} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right) \Delta q_i \quad (18)$$

De vergelijkingen van Euler zijn gewone differentiaalvergelijkingen geworden:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

en de „natuurlike randvoorwaarden" tot

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)_1 = 0.$$

Voorbeelden. De gemakkelikste veraanschouweliking van de betekenis van verandering van ν in het voorbeeld van de elastici-

teitsleer, waarin ν het aantal dimensies is van het beschouwde elastiese kontinuum, zodat de hiergenoemde vergelijkingen speciaal gelden voor een elastiese *draad* [12]).

De natuurlike randvoorwaarden (15) van het probleem

$$\Delta I = 0$$

die uitdrukken dat aan de beide uiteinden van de draad de elastiese kracht nul is, gelden vanzelfsprekend slechts dan wanneer de draad „vrije uiteinden" geeft. Zijn de uiteinden elasties of geheel vast gebonden, dan gelden ze niet, tenzij men evenals op blz. 9 beschouwt

$$\Delta(I + tI^*) = 0$$

De bewegingsvergelijkingen van de mechanika echter zijn in tegenstelling tot de elastiese vergelijkingen, speciaal van de vorm voor $\nu = 1$. Er is zodoende dus volledige analogie tussen de *statika* van elastiese draden en de *dynamika* van puntsystemen. De in die problemen optredende grootheden zijn als volgt analoog:

	Elastiese draad	*Dynamika*
ξ	Ruimtekoördinaat	Tijd
q	Uitwijkingen	Ruimtekoördinaten
F	Potentiële energie van een draadelement	Lagrangefunktie van een tijdelement
$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = p$	Elast. spanning in de richting q.	Moment in de richting q.

Zodoende is bij de mechaniese bewegingsvgln. aan de natuurlike randvoorwaarden voldaan, als begin- en eindmoment nul zijn, wat in 't algemeen niet waar zal zijn. Men moet dus òf andere randvoorwaarden stellen, of eveneens aan de integraal I een randintegraal I^* toevoegen.

Op deze twee mogelikheden berusten twee mogelike formuleringen van het *minimum-principe der dynamika:* [13])

---

[12]) KIRCHHOFF, Mathem. Physik I blz. 422 wijst reeds op de analogie tussen de bewegingsvgln. van een vast lichaam dat om een punt roteert en de evenwichtsvoorwaarden voor een elastiese staaf.

[13]) Vgl. b.v. Handbuch d. Physik V blz. 76: (L. NORDHEIM, Die Prinzipe der Dynamik).

1. Als men vaste begin- en eindkoördinaten voorschrijft: de werkelike beweging van een mechanies stelsel is onder de naburige mogelike bewegingen met vaste begin- en eindkoördinaten en -tijden gekenmerkt door een extremum van de integraal $I = \int L d\xi$. *(Principe van Hamilton)*

2. Als men toevoegt de termen:

$$I^* \equiv -\sum_i P_{i1} q_{i1} + \sum_i P_{i0}\, q_{i0} \quad (P \text{ konstanten}) \tag{19}$$

waardoor de natuurlike randvoorwaarden worden

$$p_{i1} = P_{i1},\ p_{i0} = P_{i0} \tag{20}$$

d.w.z. vaste begin- en eindmomenten, zou men tot de formulering komen: de werkelike beweging is onder naburige mogelike met vaste begin- en eindmomenten en -tijden gekenmerkt door een extremum van $I + I^*$.

Deze laatste speciale keuze van I^* zou in het geval van de elastiese draad betekenen dat op de uiteinden een gegeven kracht P werd uitgeoefend (binding aan een oneindig ver verwijderd elasties centrum).

De gedaanteverandering die de bewegingsvergelijkingen zouden ondergaan wanneer daarin ook de ν groter werd (meerdere „tijden" naast elkaar die de beweging bepalen) is onderzocht door KÖNIGSBERGER [14]). We zullen in het volgende meermalen gelegenheid hebben door hem gevonden formules te bespreken.

Het meetkundige voorbeeld der minimumvlakken kan voor $\nu = 2$ geïnterpreteerd worden als een vraagstuk van *kapillariteit*, voor $\nu = 1$ („de kortste verbindingsweg tussen twee gegeven punten gevraagd") als *mechanies* vraagstuk (krachtvrije beweging) of wanneer men ook „niet-Euclidiese" maatstaf beschouwt als *opties* vraagstuk (de lichtstralen bewegen zich steeds

---

[14]) Vgl. L. KÖNIGSBERGER, Die Prinzipien der Mechanik für mehrere unabhängigen Variable, J. f. Math. **124** (1902), 202; Das Energieprinzip für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung und einer beliebigen Anzahl abhängiger und unabhängiger Variablen. Sitz. ber. K. Preuss. Akad. 1904, blz. 1342; Ueber die aus der Variation der mehrfachen Integrale entspringenden partiellen Differentialgleichungen der allgemeinen Mechanik. Sitzber. d. K. Preuss. Akad. 1905 I, blz. 250.

langs de weg van de kortste „lichttijd" Ω) en eveneens als algemener mechanies vraagstuk (gravitatietheorie!). [15])

5 — Het geval $\nu = 0$

Tenslotte is er nog reden om te spreken van het geval $\nu = 0$, waarbij de „verarming" van het probleem zodanig is dat men van ontaarding kan spreken. Er zijn nu geen onafhankelik veranderliken; het probleem kan dus ook niet zijn q te bepalen als funktie der ξ, doch het is: q te bepalen als funktie van de in F nog optredende konstanten, zó dat

$$\delta F(q_i) = 0 \tag{21}$$

We hebben hier dus te maken met „gewone" minimumproblemen, waarvan de oplossing luidt

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0$$

waartoe de vgln. van Euler nu ook inderdaad ontaard zijn. De begrippen rand en randvoorwaarden hebben hun betekenis nu verloren. In sommige opzichten zijn deze problemen echter zo volkomen een voortzetting van de reeks der integraalproblemen, dat vermelding zeker de moeite waard is.

We zullen twee kategorieën van deze vraagstukken in 't biezonder bespreken, nl.

1°. die waarbij F de speciale gedaante $\Phi(q) - \Sigma Qq$, waarin de Q konstanten zijn, heeft, zoals bv. in de thermodynamika.

Hierop komen we terug, wanneer we voor alle problemen deze gedaante van F bespreken.

2°. die waarbij de q_i aan zekere nevenvoorwaarden gebonden zijn. We gaan hier even in op de oplossing van dergelijke problemen.

Behalve aan (21) moet door de q_i dan ook nog voldaan worden aan een of meer vergelijkingen van de vorm

$$V_e(q_i) = 0 \tag{22}$$

[15]) Vgl. SCHRÖDINGER, Vorlesungen über Wellenmechanik; CARATHÉODORY, Ueber den Zusammenhang der Theorie der absoluten optischen Instrumente mit einem satze der Variationsrechnung, sitz. Ber. München, math. Abt. 1926, blz. 1; FRANK, PH. Über die Eikonalgleichung in allgemein anisotropen Medien, Ann. d. Phys. **84** (1927) 891.

Men zou uit deze vgln. enige q_i kunnen oplossen en substitueren in F, waardoor men tot een minimumprobleem zonder nevenvoorwaarden zou teruggekeerd zijn. Het aantal veranderliken zou alleen verminderd zijn.

Meer symmetries is de bekende methode waarbij ingevoerd worden de zgn. *multiplikatoren van* LAGRANGE λ_e en dan naar een extremum gevraagd wordt van

$$F + \Sigma\lambda_e V_e$$

waarbij de λ_e als (onbekende) konstanten te behandelen zijn. Men kan bewijzen dat de aan deze opgave, dus aan

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} + \sum_e \lambda_e \frac{\partial V_e}{\partial q_i} = 0 \tag{23}$$

voldoende q_i juist de gezochte zijn. Daarbij moeten de λ_e geelimineerd worden met behulp van (22). Voor het bewijs vgl. de leerboeken van differentiaalrekening [16]).

Op de gevallen van niet integreerbaare differentiaalbetrekkingen in plaats van (22) (niet-holonome nevenvoorwaarden) zal hier niet ingegaan worden [17]).

Voorbeelden

C — *Thermodynamika*: evenwicht van fazen.

Wordt gevraagd naar het evenwicht van een stelsel van n fazen, die
x_i als massa,
u_i als inwendige energie en
v_i als volume hebben,

terwijl

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma x_i = x \text{ de totale massa,} \\ \Sigma u_i = u \text{ de totale inw. energie, en} \\ \Sigma v_i = v \text{ het totale volume} \end{array}\right\} \tag{24}$$

gegeven zijn, dan wordt de oplossing gevonden door

$$\eta\,(u_i, v_i, x_i) = \sum_i^v{}^i\, x_i\, \eta_i \left(\frac{u_i}{x_i}, \frac{v_i}{x_i}\right)$$

een max. te maken met als nevenvoorw. (24).

---

[16]) Bv. COURANT, Vorlesungen über Diff. u. Integralrechn. II, blz. 142.

[17]) Vgl. b.v. SCHERING, Ges. Werke I; blz. 193; verder NORDHEIM, Die Prinzipe der Mechanik, Handb. d. Phys. V.

De oplossing wordt

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_i} = \lambda \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v_i} = \mu \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = \nu$$

waarin λ, μ en ν multiplikatoren van Lagrange zijn.

Met de uit de eerste en tweede hoofdwet volgende formules

$$T_i d\eta_i = dU_i + p_i dV_i, \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial U_i} = \frac{1}{T_i}, \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial V_i} = \frac{p_i}{T_i}$$

wordt dit:

$$\frac{1}{T_i} = \lambda \qquad \frac{p_i}{T_i} = \mu \qquad \frac{U_i - T_i\eta_i + p_i V_i}{T_i} = \nu \tag{25}$$

waarin met U_i en V_i is bedoeld resp. $\frac{u_i}{x_i}$ en $\frac{v_i}{x_i}$, d.w.z. de inwendige energie en het volume van de massa-eenheid.

E — *Elektrostatika* [18])

Zijn van een stelsel elektriese geleiders:
x_i meetkundige koördinaten, die de ligging bepalen;
q_i de ladingen,
dan wordt de evenwichtstoestand van zo'n stelsel door een extremum van de elektrostatiese energie bepaald, welke van de vorm $F(x_i, q_i)$ is.

Als nevenvoorwaarden kunnen optreden:

$$\Sigma' q_i = k', \ \Sigma'' q_i = k'' \text{ enz.}$$

welke sommen elk op enige der geleiders betrekking hebben. Voor aldus verbonden geleiders vindt men

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{26}$$

de potentialen zijn gelijk.

F — *Elektrodynamika*: *net van elektriese stromen* [19]).

De gelijkstroomverdeling in een net van geleiders wordt gegeven door

$$\Delta F \equiv \Delta \ \Sigma(\tfrac{1}{2} I^2 r - KI) = 0 \tag{27}$$

waarin K en r resp. zijn de (gegeven) elektromotoriese kracht en de Ohmse weerstand van en I de (te variëren) gelijkstroomsterkte in elk der geleiders, terwijl de sommatie over alle geleiders is uit te strekken. Als nevenvoorwaarden moeten genomen worden

$$\mathrm{S}\, I = 0$$

voor elk vertakkingspunt, waarbij de som S te nemen is over alle in één vertakkingspunt samenkomende geleiders.

---

[18]) Vgl. LIVENS, Theory of Electricity, § 138. JEANS, El. & Magn. Ch. IV.
[19]) Vgl. LIVENS, t.a.p., blz. 294. JEANS, t.a.p. Ch. IX.

(De multiplikatoren van Lagrange blijken de (negatieve) potentialen in de vertakkingspunten te zijn).

Uitbreiding *a*. Inplaats van gelijkstromen treden wisselstromen op. Het minimumprincipe blijft van kracht, mits men — de formules in Gotiese letters schrijvende — verstaat onder:

$$\mathfrak{J} = Ie^{i(pt+\delta)}$$

$$\mathfrak{W} = W' + iW'' \left(W' = r;\ W'' = Lp - \frac{1}{pC}\right)$$

$$\mathfrak{K} = Ke^{ipt}$$

waarbij I de amplitude van de wisselstroom, $2\pi/p$ de (konstant gedachte) periode van de optredende e.m.k. en wisselstromen, δ het fazeverschil van de stroom in een bepaalde geleider met de e.m.k., L de koëfficiënt van zelfinduktie, C de kapaciteit van een geleider.

Het is duidelik dat de stroomsterkte en de e.m.k. de reële gedeelten zijn van $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{K}$; evenzo blijken de potentialen in de vertakkingspunten de reële gedeelten te zijn van de (nu komplexe) multiplitakoren van Lagrange. Echter is in 't algemeen niet het reëele gedeelte van $\mathfrak{J}$ gelijk aan de energie E van het stelsel; dit is slechts dan het geval wanneer $W' = 0$ of $W'' = 0$.

Uitbreiding *b*. Behalve zelfinduktie kan men ook wederzijdse induktie der geleiders in aanmerking nemen. Men krijgt dan de stroomverdeling uit

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\mathfrak{W}_{\beta\gamma}\,\mathfrak{J}_{\beta}\,\mathfrak{J}_{\gamma} - \sum_{\beta}\mathfrak{K}_{\beta}\,\mathfrak{J}_{\beta}\right) = 0$$

A — *Elasticiteitsleer*: diskreet elasties stelsel.

Tot een gewoon minimumprobleem komt men eveneens door van het elastiese kontinuum over te gaan tot een diskreet elasties stelsel, d.w.z. een stelsel van een eindig aantal punten, die elasties aan elkaar gebonden zijn. De rol van de ξ kan nu overgenomen worden door een of meer indices i en q_i is nu de uitwijking van het i-de punt.

De potentiele energie wordt b.v. $\frac{1}{2}\Sigma c_i\,(q_i - q_{i-1})^2$.

De verdere uitwerking zij aan de lezer overgelaten.

B — *Mechanika*. De statiese evenwichtsvergelijkingen die men als grensgeval uit de vgln. van Lagrange verkrijgt wanneer alle snelheden $\equiv 0$ worden verondersteld, vormen eveneens een voorbeeld. Het bijbehorend minimumprincipe gaat over in:

$$\delta U = 0$$

Als nevenvoorwaarden kunnen hier optreden vgln. die het lopen van bepaalde punten langs bepaalde oppervlakken voorschrijven. De betekenis der multiplikatoren van Lagrange is daar-

bij dat ze de grootte der door die (absoluut glad gedachte) oppervlakken ondervonden krachten aangeven.

6 — Invloed van de orde der afgeleiden [20])

Met het oog op later te bespreken analogieën is het doelmatig hier te wijzen op de uitbreiding die de oplossingsvgln. van het minimumprobleem voor een enkelvoudige integraal ondergaan, wanneer de integrand F behalve eerste, ook hogere afgeleiden bevat:

$$F(q_i,\ \dot{q}_i,\ \ddot{q}_i,\ \ldots\ q_i^{(r)},\ \xi)$$

Men vindt op geheel analoge wijze — d.w.z. door te bedenken dat

$$\delta q_i^{(r)} = \frac{d^{(r)}}{d\xi^r}\,\delta q_i$$

en door $r \times$ partiëel integreren — dat de oplossingsvergelijkingen nu luiden:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{d\xi^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}} \ldots + (-1)^r \frac{d^{(r)}}{d\xi^r}\frac{\partial F}{\partial q_i^{(r)}} = 0 \qquad (28)$$

Voorbeelden van dergelijke problemen zijn:

1. Elastiese evenwichtsvraagstukken waarbij de buiging in aanmerking genomen wordt (de kromtestraal bevat 2e afgeleiden) [21]).

2. De beweging van een elektron in zijn eigen veld. Herglotz verkrijgt door reeksontwikkeling afgeleiden van elke orde; Lorentz beperkt zich tot niet hogere dan derde afgeleiden [22]).

3. De generalisatie door Königsberger gegeven voor de mechaniese bewegingsvergelijkingen, wanneer de L ook hogere afgeleiden bevat. [23])

We zullen op deze vraagstukken echter niet dieper ingaan, aangezien dat ons te ver van ons eigenlike thema voert.

7 — Enige speciale vormen van F

Met het oog op later te bespreken toepassingen „signaleren" we hier de volgende speciale vormen van F.

---

[20]) Vgl. bv. HADAMARD, Leçons, blz. 134; BOLZA, Vorl. blz. 153.

[21]) BORN, Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie, Diss. Gött. 1907.

[22]) HERGLOTZ, Gött. Nachr. 1903, Heft 6 blz. 1.; LORENTZ, Electrons, § 37.

[23]) KÖNIGSBERGER, Ueber die allg. kinetischen Potentiale, J. f. Math. 1900, blz. 141; Die Prinzipien der Mechanik, TEUBNER 1901; Sitz. ber. Preuss. Akad. 1904, blz. 1342; id. 1905 I, blz. 250.

1°. $F \equiv \Phi - \sum_i Q_i q_i$

waarbij de Q_i gegeven konstanten of funkties der ξ_λ zijn, en de Φ al dan niet de q_i expliciet bevat. Men gaat gemakkelik na welke wijzigingen door deze vorm van F in de vergelijkingen van Euler aangebracht moeten worden.

De betekenis der Q_i moge blijken uit de volgende voorbeelden:

$\nu = \mathbf{0}$. Hierbij zal de Φ ook van q afhangen, anders is er van een extremum in de gewone zin geen sprake.

C — *Thermodynamika*: evenwicht bij gegeven druk en temperatuur;
Φ inwendige energie u van een stelsel,
q_1 het (negatief genomen) volume v,
q_2 de entropie η,
Q_1 de druk p,
Q_2 de temperatuur T,
dan is F de thermodynamiese potentiaal, die bij gegeven druk en temperatuur naar een maximum streeft. Dus is

$$p = -\frac{\partial u}{\partial v} \quad , \quad T = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

E — *Elektrostatika*: evenwicht van een stelsel geleiders;
Φ elektrostatiese energie,
q_i de ladingen van de geleiders,
Q_i de potentialen,
dan wordt F tot een extremum bij gegeven potentialen.

Het verband tussen dit vraagstuk en het op blz. 16 behandelde met gegeven ladingen heeft grote analogie met het verband tussen de randvoorwaarden bij binding door gegeven krachten en binding door gegeven uitwijkingen aan de uiteinden.

$\nu = \mathbf{1}$. **B.** *Mechanika.* Blijft men onder F de funktie van Lagrange verstaan, dan kan de som ΣQq daarbij komen tengevolge van een uitwendig krachtveld met kracht $-Q$.

Heeft Q de speciale eigenschap dat hij slechts van nul verschillend is op de tijdstippen ξ_0 en ξ_1, en dan oneindig groot van de eerste orde is („stoot"), dan is het bijgevoegde gedeelte identiek met I^* van (19), toegevoegd om als natuurlike randvoorwaarden de vgln. (20) te verkrijgen; dan is nl.:

$$-\int_{\xi_0}^{\xi_1} Qq d\xi = P_1 q_1 - P_0 q_0$$

$\nu \geqq 1$. **A.** *Elasticiteitsleer.* Ook hier hebben de $-Q$ de betekenis van een uitwendig krachtveld.

Voor het geval dat men met een isotroop elasties kontinuum te doen heeft, komen dan in de Φ alleen $q_{i\lambda}$ en geen q_i of ξ_λ voor. (Vgl. (7).)

G — *Elektrodynamika.* De F waaruit de elektrodynamiese veldvergelijkingen afgeleid worden volgens het principe van Schwarzschild zijn steeds van de aangegeven vorm. Daarbij zijn de Q_i identiek met de grootheden s_i, de stroomkomponenten. Vgl. (11).

2° — Kwadratiese funkties

Op verschillende manieren kunnen kwadratiese funkties in de besproken problemen optreden, waardoor bepaalde vereenvoudigingen mogelik worden, die we bij de verschillende theorema's zullen vermelden. Voor een goed overzicht noemen we deze gevallen nog even.

$\nu = 0$. **E.** *Elektrostatika*: de elektrostatiese energie van een stelsel geleiders is steeds:

$$F = \sum_i \sum_k c_{ik}\, q_i\, q_k \tag{29}$$

waarbij de c_{ik} nog van de x der geleiders (blz. 16) kunnen afhangen.

$\nu = 1$. **B.** *Mechanika.* De kinetiese energie T is steeds kwadraties in de $\dot{q}_i$; komen in de vergelijkingen (8) de t niet expliciet voor, dan is T **homogeen** kwadraties; men spreekt dan van een *skleronoom* stelsel.

$\nu \geqq 1$. **A.** *Elasticiteit.* Voldoet het beschouwde kontinuum aan de wet van Hooke, dan is de elastiese energie homogeen kwadraties in de $q_{i\lambda}$.

G — *Elektrodynamika.* De F waaruit de veldvergelijkingen afgeleid kunnen worden, zijn kwadraties in de $q_{i\lambda}$ $(= A_{i\lambda})$.