HOOFDSTUK II

RECIPROCITEITSBETREKKINGEN

8 — We bespreken in dit hoofdstuk een kategorie van betrekkingen die zich laten afleiden uit minimumvraagstukken waarbij F de vorm heeft:

$$F = \Phi - \Sigma_i Q_i q_i$$

waarin de Q_i gegeven konstanten zijn. De hier af te leiden betrekkingen leggen verband tussen variaties van deze konstanten en de daarmee samenhangende variaties der q_i.

Het schijnt ons doelmatig, hier te beginnen met de problemen waarin

$\nu = 0$. **Funktie van een eindig aantal veranderliken.** Denken we ons de Q_i gevariëerd met een bedrag ΔQ_i en de q_i met Δq_i, dan is

$$\Delta F = \Delta\Phi - \Sigma\, Q_i\, \Delta q_i - \Sigma\, q_i\, \Delta Q_i$$

Nu is echter $$\Delta\Phi - \Sigma\, Q_i\, \Delta q_i = 0$$

omdat de q_i voldoen aan $\delta F = 0$ waarin δ elke willekeurige variatie der q_i betekent waarbij de Q_i niet gevariëerd worden. We houden dus over:

$$\Delta F = -\Sigma\, q_i\, \Delta Q_i$$

Passen we nu een tweede van Δ onafhankelike variatie Δ' toe, dan is

$$\Delta'\Delta F = -\Sigma \Delta' q_i\, \Delta Q_i \tag{30}$$

omdat $\Delta'\Delta Q_i = 0$; tevens is, wegens die onafhankelikheid van Δ en Δ':

$$\Delta\Delta' F = \Delta'\Delta F \tag{31}$$

Uit (30) en (31) volgt:

$$\Sigma\, \Delta' q_i\, \Delta Q_i = \Sigma\, \Delta q_i\, \Delta' Q_i \tag{32}$$

Kiezen we nu ΔQ_i zó dat alle $\Delta Q_i = 0$ behalve ΔQ_k; $\Delta' Q_i$ zó dat alle $\Delta' Q_i = 0$ behalve $\Delta' Q_l$, dan is dus:

$$\Delta' q_k \, \Delta Q_k = \Delta q_l \, \Delta' Q_l \text{ of}$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \tag{33}$$

Een overzichtelike samenvatting van deze afleiding geven de formules:

$$\Delta F \equiv \Delta(\Phi - \sum_1^n{}_i \, Q_i \, q_i) = - \sum_1^n{}_i \, q_i \, \Delta Q_i$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$$

waaruit tevens duidelik wordt dat men nog analoge betrekkingen kan vinden door uit te gaan van

$$\Delta \Phi = \sum_1^n{}_i \, Q_i \, \Delta q_i \tag{34}$$

en van alle tussenvormen:

$$\Delta(\Phi - \sum_1^k{}_i \, Q_i \, q_i) = \sum_{k+1}^n{}_i \, Q_i \, \Delta q_i - \sum_1^k{}_i \, q_i \, \Delta Q_i \tag{35}$$

Uit (34) en (35) leidt men nl. af resp.

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \quad (36) \quad \text{en} \quad \frac{\partial Q_k}{\partial Q_l} = - \frac{\partial q_l}{\partial q_k} \tag{37}$$

Voorbeelden: **C** — *Thermodynamika*: *Reciprociteitsbetrekkingen van* MAXWELL.

Verstaat men onder
Φ de inwendige energie van een thermodynamies stelsel;
q_1 het negatieve volume v,
q_2 de entropie η,
Q_1 de druk p en
Q_2 de temperatuur T, dan gaan bovengegeven reciprociteitsbetrekkingen over in de bekende vergelijkingen van Maxwell:

$$\frac{\partial \eta}{\partial p} = - \frac{\partial v}{\partial T} \; ; \; \frac{\partial T}{\partial v} = - \frac{\partial p}{\partial \eta} \; ; \; \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial T} \; , \; \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \tag{38}$$

Men kan hier ook zeer goed gevallen met meer dan twee q's beschouwen, q_3 kan b.v. zijn elektriese lading, q_4 magnetisatie, enz. De vgln. van Maxwell kunnen zodoende met analoge voor deze q's worden uitgebreid.

E — *Elektrostatika.* (Vgl. blz. 16). Is K_i de mechaniese kracht die een der geleiders ondervindt in de richting van x_i, dan is $\frac{\partial K_i}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_i}$; verder is

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_k} = \frac{\partial K_k}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \tag{39}$$

Beschouwt men een deel der q_i en een deel der Q_i als onafhankelik veranderliken, dan is:

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_i} = - \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} \tag{40}$$

D — *Optika*

Gaat een lichtstraal door twee punten P_0 en P_1 met rechthoekige koördinaten q_i^0 en q_i^1, in de richtingen met richtingskosinussen λ_i^0 en λ_i^1, en zijn de lichtsnelheden voor de media van P_0 en P_1 resp. c_0 en c_1 dan geldt

$$\frac{\partial}{\partial q_i^1} \left(\frac{\lambda_i^0}{c_0}\right) = - \frac{\partial}{\partial q_i^0} \left(\frac{\lambda_i^1}{c_1}\right) \tag{41}$$

Voor de afleiding vergelijk blz. 13. Voor literatuur zie men de beschouwingen van Hamilton, Bruns, Klein over het zgn. „eikonaal" E dat met de lichttijd Ω samenhangt door de formule

$$E = \Omega + \frac{\rho_0}{c_0} - \frac{\rho_1}{c_1}$$

waarbij ρ_0 en ρ_1 resp. zijn de afstanden langs de lichtstraal gemeten van P_0 resp. P_1 tot voorwerp en beeld [24]).

9 — Gevallen $\nu > 0$: integralen

We hebben hier dus een variatieprobleem waarbij

$$I = \int_G \ldots \int d\omega \, (\Phi - \Sigma \, Q_i \, q_i)$$

en denken ons weer een variatie Δ toegepast:

$$\Delta I = \int_G \ldots \int d\omega \, (\Delta\Phi - \Sigma \, Q_i \, \Delta q_i - \Sigma q_i \, \Delta Q_i)$$

Wederom is om gelijke redenen als in § 8,

$$\int_G \ldots \int d\omega \, (\Delta\Phi - \Sigma \, Q_i \, \Delta q_i) = 0$$

zodat we houden:

$$\Delta I = - \int \ldots \int d\omega \, \Sigma \, q_i \, \Delta Q_i \tag{42}$$

---

[24]) Zie ook F. KLEIN, Ges. Abh. II, blz. 607.

Passen we hierop een tweede variatie Δ', onafhankelik van Δ, toe, en bedenken, dat tengevolge van die onafhankelikheid $\Delta'\Delta Q_i = 0$, $\Delta\Delta' Q_i = 0$ en $\Delta'\Delta I = \Delta\Delta' I$, dan krijgen we:

$$\int_G \ldots \int d\omega \, \Sigma \, (\Delta q_i \, \Delta' Q_i - \Delta' q_i \, \Delta Q_i) = 0 \tag{43}$$

Kiezen we hierin speciaal

alle $\Delta Q_i = 0$ behalve ΔQ_k in een oneindig klein gebied rondom $(\xi_1 \ldots . \xi_n)$

alle $\Delta' Q_i = 0$ behalve $\Delta' Q_l$ in een oneindig klein gebied rondom $(\xi_1' \ldots . \xi_n')$ en noemen we:

$$\int_G \ldots \int d\omega \, \Delta Q_k = \Delta \mathfrak{Q}_k \quad \text{en} \quad \int_G \ldots \int d\omega \, \Delta' Q_l = \Delta' \mathfrak{Q}_l,$$

dan wordt (43):

$$\Delta q_l \, (\xi_1' \ldots \xi_n') \, . \, \Delta' \mathfrak{Q}_l = \Delta' q_k \, (\xi_1 \ldots \xi_n) \, . \, \Delta \mathfrak{Q}_k \tag{44}$$

De betekenis van deze reciprociteitsbetrekking is voor *statiese* problemen duidelik: ze drukt de evenredigheid uit tussen de „oorzaken" $\Delta \mathfrak{Q}_k$ en $\Delta' \mathfrak{Q}_l$ en de „gevolgen" $\Delta q_l(\xi')$ en $\Delta' q_k(\xi)$.

Voor *dynamiese* problemen, waarbij dan b.v. ξ_n de tijd voorstelt en $\xi_n' > \xi_n$, kan men wel $\Delta q_l(\xi')$ het gevolg noemen van de oorzaak $\Delta \mathfrak{Q}_k(\xi)$, echter niet zonder meer ook $\Delta' q_k(\xi)$ het gevolg van $\Delta' \mathfrak{Q}_l(\xi')$. We hebben hier dus eigenlik nog niet te doen met een betrekking zoals men ze redelikerwijs zou wensen: nl. een evenredigheid tussen gevolgen op het ogenblik ξ_n' en de plaatsen ξ resp. ξ' en oorzaken op het ogenblik ξ_n en de plaatsen ξ' resp. ξ.

Tot nu toe is, voorzover ik kon nagaan, alleen door HELMHOLTZ [25]) aan dit bezwaar tegemoetgekomen doordat hij zgn. *reversibele* verschijnselen beschouwt, d.z. verschijnselen die ook in omgekeerde opeenvolging in de tijd kunnen optreden. Formeel betekent dat dat alle afgeleiden naar de tijd van teken kunnen veranderen, zonder dat de formules onjuist worden. In het minimumprincipe mogen dan die afgeleiden in 't algemeen niet lineair voorkomen. Voor dergelijke verschijnselen kan men dan in de grootheden $\Delta' q_k$ en $\Delta' Q_l$ als laatste argument lezen ξ'_n resp. ξ_n in plaats van omgekeerd en neemt (44) de gewenste vorm aan.

---

[25]) VON HELMHOLTZ, Die physikalische Bedeutung des Prinzips d. kl. Wirkung, Wiss. Abh. III, blz. 238.

Voor verschijnselen waar dit niet het geval is, zal de bovengegeven afleiding niet bruikbaar zijn en „direkte" afleiding — die ondertussen heel wat gekompliceerder kan zijn — nodig zijn. Van zo'n direkte afleiding geven we in 't aanhangsel een eenvoudig voorbeeld (vgl. § 20).

Opmerking. De punten ξ en ξ' mogen zowel „binnen" in G als in het randgebied g genomen worden.

Bovendien kan de afhankelikheid der ΔQ van ξ nog op biezondere wijze gekozen worden, waardoor de integralen $\Delta\mathfrak{Q}$ degenereren tot lagere integralen. De betekenis hiervan moge blijken uit het volgende voorbeeld.

B — *Mechanika*: *Reciprociteitsbetrekkingen van* HELMHOLTZ [26]).

De boven gegeven vergelijkingen zijn toepasselik op de mechanika, wanneer we enkelvoudige integralen beschouwen. Daarbij kunnen we de Q_i als volgt kiezen:

$$Q_i = K_i + P_i$$

waarbij de K_i in het gehele interval $\xi_0 < \xi < \xi_1$ bestaan en de betekenis hebben van uitwendige krachten, die op het systeem werken; terwijl de P_i alleen van nul verschillen in de punten ξ_0 en ξ_1 en daar oneindig groot van de eerste orde worden, zodat

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} (\Phi - \sum_i K_i q_i)\, d\xi - P_{i1} q_{i1} + P_{i0} q_{i0}$$

(Men vgl. deze formulering met de tweede op blz. 13 gegeven).

Kiezen we nu in de eerste plaats alle $\Delta K = 0$ dan krijgen we reciprociteitsbetrekkingen die uitsluitend betrekking hebben op randwaarden.

Op de zoeven genoemde gronden wordt nu:

$$\Delta\mathfrak{Q}_k = \Delta P_k(\xi)$$
$$\Delta'\mathfrak{Q}_l = \Delta P_l(\xi')$$

en de reciprociteitsbetrekkingen worden:

$$\Delta q_l(\xi') \,.\, \Delta' P_l(\xi') = \Delta' q_k(\xi) \,.\, \Delta P_k(\xi)$$

---

[26]) v. HELMHOLTZ, t.a.p.

Hierin stellen voor:

$\Delta q_l(\xi')$ de variatie van q_l in het punt ξ' tengevolge van een variatie ΔQ_k van Q_k in ξ;

$\Delta' q_k(\xi)$ de variatie van q_k in het punt ξ tengevolge van een variatie $\Delta' Q_l$ van Q_l in ξ'.

Zowel ξ als ξ' kan nog zijn ξ_0 of ξ_1, waardoor drie typen van reciprociteitsbetrekkingen ontstaan:

$$\frac{\Delta q_{l0}}{\Delta P_{k0}} = \frac{\Delta' q_{k0}}{\Delta' P_{l0}} \quad ; \quad \frac{\Delta q_{l1}}{\Delta P_{k0}} = - \frac{\Delta' q_{k0}}{\Delta' P_{l1}} \quad ; \quad \frac{\Delta q_{l1}}{\Delta P_{k1}} = \frac{\Delta' q_{k1}}{\Delta' P_{l1}}$$

In de tweede plaats kunnen we alle $\Delta P = 0$ kiezen waardoor we reciprociteitsbetrekkingen krijgen voor punten in 't binnenste onderling.

In de derde plaats tenslotte kunnen we „gemengde" betrekkingen krijgen van de vorm:

$$\Delta q_l(\xi') \,.\, \Delta' \mathfrak{Q}_l = \Delta' q_k(\xi) \,.\, \Delta P_k(\xi) \tag{45}$$

waarin

$$\Delta' \mathfrak{Q}_l = \int d\xi \,.\, \Delta' K_l$$

dus een stoot voorstelt; verandering van de begin- ef eindmomenten P heeft dus een uitwerking van dezelfde orde van grootte als een stoot, zoals men verwachten moest.

We willen er tenslotte nog op wijzen dat de ΔQ_i der elektrodynamika, d.z. de Δs_i, niet volkomen willekeurig in de $\xi_1 - \xi_4$ ruimte kunnen gekozen worden, maar dat voldaan moet zijn aan de wet van het behoud van „rustlading":

$$\sum_1^4 i \, \frac{\partial \Delta s_i}{\partial \xi_i} = 0$$

Zoals reeds aangegeven op blz. 9, kan men hieraan voldoen door te kiezen de Δs van formule (14). Na enige voor de hand liggende omrekeningen komt men dan tot de betrekking

$$\Delta K_m(\xi') \,.\, \Delta' \mathfrak{X}_m(\xi') = \Delta' K_l(\xi) \,.\, \Delta \mathfrak{X}_l(\xi)$$

waarin: $\Delta \mathfrak{X} = \int .. \int d\omega \; \Delta x$, en

$K_m = - \sum_i s_i \, F_{mi}$ de „*Lorentz*-kracht" is, terwijl Δx (en dus Δs) „gelokaliseerd" gedacht zijn in ξ, $\Delta' x$ (en $\Delta' s$) in ξ'.

10 — Kwadratiese funkties

$\nu = 0$. Wanneer de q homogeen lineaire funkties der Q zijn, geldt:

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{q_k(l)}{Q_l} \tag{46}$$

waarin we met $q_k(l)$ bedoelen de waarde die q_k heeft, wanneer alle Q nul zijn behalve Q_l. Dientengevolge hebben we dan naast (33) ook:

$$\frac{q_k(l)}{Q_l} = \frac{q_l(k)}{Q_k} \tag{47}$$

d.w.z. de *reciprociteitsbetrekkingen gelden behalve voor de variaties ook voor de waarden der q_i zelf.*

Dit geval zal zich voordoen, wanneer de Φ in q homogeen kwadraties is, daar dan de vergelijkingen van Euler worden:

$$Q_i = \sum_k c_{ik}\, q_k \tag{48}$$

Voorbeelden: het elektrostatiese vraagstuk van blz. 20, de stroomverdeling in een net van geleiders (blz. 16).

Voor een meer direkte afleiding vgl. het aanhangsel, § 18.

$\nu \geqq 1$. Ook voor minimumproblemen waarbij een integraal een extremum wordt zijn er dergelijke reciprociteitsbetrekkingen voor de gevallen waarin F homogeen kwadraties is in de $q_{i\lambda}$.

Men vindt nl. (zie aanhangsel, § 18) onder zekere randvoorwaarden:

$$\int\ldots\int d\omega\, \Sigma\, Q_i'\, q_i'' = \int\ldots\int d\omega\, \Sigma\, Q_i''\, q_i' \tag{49}$$

Hierin kan men weer alle Q_i' overal $= 0$ nemen, behalve Q_k' in het punt ξ', eveneens alle Q_i'' overal $= 0$ behalve Q_l'' in het punt ξ'', en invoeren de notatie

$$\int\ldots\int d\omega Q'_k = \mathfrak{Q}'_k \qquad \int\ldots\int d\omega Q_l'' = \mathfrak{Q}_l''$$

waardoor (49) wordt:

$$q_k''(\xi')\, \mathfrak{Q}_k' = q_l'(\xi'')\, \mathfrak{Q}_l''.$$

Statiese problemen. Voor de elektrostatika en b.v. de statika van een niet-relativisties zwaarteveld betekent bovengenoemde betrekking niet anders dan de symmetrieeigenschap van de funktie van GREEN. (Vgl. bv. Riemann-

Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, I blz. 241, 336). In deze gevallen immers betekent $\mathfrak{Q}$ de lading (ev. zware massa), q de potentiaal; bij gelijke $\mathfrak{Q}$'s wordt de laatste vergelijking $q''(\xi') = q'(\xi'')$.

Voorbeelden:

A' — *Dynamika van een elasties kontinuum.*

$\mathfrak{Q}_k'$ is een stoot in de richting k op het tijdruimtepunt ξ', $\mathfrak{Q}_l''$ een stoot in de richting l op het tijdruimtepunt ξ''. De uitwijkingen die „tengevolge daarvan" (vgl. blz. 24) optreden in de punten ξ'' in de richting l en ξ' in de richting k zijn dus evenredig met die stoten.

Vgl. ook Rayleigh, Theory of Sound II p. 145 die deze stelling geeft voor het geval dat

$$F = \left(\frac{\partial q}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)^2 - \frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - qQ$$

waarbij bovendien een sinusoïdale kracht en oplossing: $Q = A \sin pt$, $q = \alpha \sin pt$ vooropgesteld is, waardoor de differentiaalvergelijkingen worden $\triangle q + k^2 q = Q$.

Wij wijzen er nog op dat men bij deze speciale veronderstelling de gevallen „met wrijving" d.i. met een term $\beta \frac{\partial q}{\partial t}$ in de differentiaalvgl. toch ook op de bovengenoemde vorm kan brengen, als men nl. k komplex neemt.

G — *Elektrodynamika.* Bij toepassing van de formule (49) moet men — behalve kwesties van randwaarden — hier weer de moeilikheid oplossen, dat de s niet overal vrij gekozen kan worden. Ik ben er niet in geslaagd deze moeilikheid volkomen bevredigend op te lossen en volsta dus met er op te wijzen.

De zo te vinden reciprociteitsbetrekkingen zullen echter waarschijnlik niet gelijkluidend zijn met door LORENTZ [27]) aangegeven betrekkingen, welke een asymmetrie t.o.v. de tijdkoördinaat vertonen.

---

[27]) H. A. LORENTZ, Versl. A'dam IV (1895),