HOOFDSTUK III

ANDERE FORMULERINGEN VAN DE BESCHOUWDE PROBLEMEN ALS MINIMUMPROBLEMEN

11 — De in het eerste hoofdstuk besproken vraagstukken laten zich veelal op meer dan één wijze als minimumvraagstuk formuleren. We willen in dit hoofdstuk enige andere formuleringen aangeven.

Funktie van een eindig aantal veranderliken

Van deze kategorie bespreken we hier alleen de vraagstukken van de speciale vorm:

$$F = \Phi - \Sigma\, Qq$$

waarvan de oplossingen waren (§ 7):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} - Q = 0 \tag{51}$$

Veronderstellen we, dat deze vgln. oplossing toelaten naar de q_i en dat die oplossingen luiden

$$q_i = f_i(Q)$$

Vormen we hiermee de funktie $\Psi(Q)$ door in F alle q_i te vervangen door $f_i(Q)$, dan is

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Q_i} = \Sigma\, \frac{\partial \Phi}{\partial q_k}\, \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} - \Sigma\, Q_k\, \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} - f_i = - f_i$$

waardoor de oplossingsvgl. zich ook laat schrijven

$$- \frac{\partial \Psi}{\partial Q_i} = q_i$$

en dus het vraagstuk als

$$\delta K \equiv \delta(\Psi + \Sigma\, qQ) = 0$$

waarin de Q veranderlik en de q konstanten zijn.

Voorbeelden. C — *Thermodynamika*. Voor het evenwicht van een thermodynamies stelsel zijn o.a. twee formuleringen mogelik:

a) bij konstante druk en temperatuur wordt de thermodynamiese potentiaal een minimum.

b) bij konstant volume en inwendige energie wordt de entropie een maximum.

Deze twee formuleringen worden door bovenstaande formules gegeven, als men — in tegenstelling tot blz. 16 — zet voor: $F : -\frac{\zeta}{T}$; $\Phi : \eta$; $q_1 : u$; $q_2 : v$; $Q_1 : \frac{1}{T}$; $Q_2 : \frac{p}{T}$.

Opmerking. De „nieuwe" funktie K is met de oude F op het teken na identiek wanneer Φ homogeen kwadraties is in de q, zoals in de elektrostatika (§ 7).

12 — Enkelvoudige integralen

De mogelike andere formuleringen van de hier bedoelde problemen worden het eenvoudigst ingezien en verkregen na transformatie van de oorspronkelike differentiaalvgln. Deze transformatie bespreken we daarom eerst.

Transformatie van Routh [28]).

De oorspronkelike differentiaalvgln. luiden:

$$\Gamma_i \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad i = 1 \ldots . n \tag{52}$$

definiëren we nu

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1 \ldots . k \tag{53}$$

en vormen de zgn. *funktie van* Routh:

$$R(q_1 \ldots q_n ; p_1 \ldots p_k, \dot{q}_{k+1} \ldots \dot{q}_n, \xi) = [-F(q_i, \dot{q}_i) + \sum_1^k{}_j p_j \dot{q}_j]_{\dot{q}_j = f_j} \tag{54}$$

waarbij in de rechterzijde alle $\dot{q}_j$ zijn vervangen door de funktie $f_j(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_k, \dot{q}_{k+1} \ldots \dot{q}_n, \xi)$, die men verkrijgt door (53) naar $\dot{q}_j$ op te lossen:

$$\dot{q}_j = f_j \tag{55}$$

---

[28]) Vgl. E. J. Routh, Dynamik I, 395; K. Heun, Enz. der Math. Wiss. IV, 2, blz. 453; M. Winkelmann und R. Grammel, Hb. der Phys. V, blz. 469.

Nu zijn gelijkwaardig met de oorspronkelike n differentiaalvgln. (52) + de „definitievgln." (53) de „*differentiaalvgln.van* ROUTH":

$$\frac{\partial R}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad (56') \qquad\qquad \frac{\partial R}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \qquad j = 1 \ldots k \qquad (56'')$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_l} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_l} = 0 \qquad\qquad l = k+1, \ldots . n \qquad (57)$$

Bewijs:

$$\frac{\partial R}{\partial p_j} = -\sum_1^k{}_m \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_m}\frac{\partial f_m}{\partial p_j} + \dot{q}_j + \sum_1^k{}_m p_m \frac{\partial f_m}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} - \sum_1^k{}_m \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_m}\frac{\partial f_m}{\partial q_j} + \sum_1^k{}_m p_m \frac{\partial f_m}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial q_j}$$

en dit is volgens (52)

$$= -\frac{d}{d\xi}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = -\dot{p}_j.$$

Op volkomen analoge wijze vindt men dat

$$\frac{\partial R}{\partial q_l} = -\frac{\partial F}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_l} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}$$

waaruit de vgln. (57) volgen.

Opmerking 1. In de boven gegeven beschouwingen mag ook $k = n$ zijn, zoals men gemakkelik inziet. De differentiaalvgln. worden dan alle van de vorm (56) die men de kanoniese vorm (resp. de kanoniese vergelijkingen) noemt. Histories is deze transformatie voor $k = n$ het eerst uitgevoerd. Dan wordt

$$R = H(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n, \xi) = -F + \sum_1^n{}_j p_j \dot{q}_j \qquad (58)$$

(in de mechanika de zgn. *funktie van* HAMILTON) en in de vgln. (56) is dan R door H vervangen. Een belangrijk voordeel van de funktie H is, dat daarin als veranderliken geen afgeleiden meer optreden.

Opmerking 2. Natuurlik kan men in plaats van „de eerste k" ook elk willekeurig k-tal koördinaten nemen.

13 — Andere formuleringen als minimumprobleem [29])

De differentiaalvergelijkingen van Routh en van Hamilton laten zich ook direkt verkrijgen als vergelijkingen van EULER bij minimumproblemen. Aangezien in die differentiaalvergelijkingen ook p en $\dot{p}$ voorkomen, moet men hier een minimumprincipe verwachten waarin zoowel de p als de q voorkomen en waarbij deze onafhankelik van elkaar gevariëerd worden. Variatie toch van de q alleen terwijl de p als een funktie van q en $\dot{q}$ wordt opgevat zou neerkomen op het uitvoeren van de oorspronkelike formulering als minimumvraagstuk, slechts in andere notatie.

We vragen daarom naar de funktie K waarvoor het probleem

$$\Delta I \equiv \Delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \, K(q_i, \dot{q}_i, p_j, \dot{p}_j, \xi) = 0 \qquad (i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots k) \tag{59}$$

oplevert de differentiaalvgln. van Routh (56, 57). Bij de bespreking daarvan is het doelmatig de q_j $(j = 1 \ldots k)$ en de q_l $(l = k+1 \ldots n)$ goed van elkaar te onderscheiden; voor q_l schrijven we daarom r_l.

We stellen het probleem iets specialer door te verlangen, dat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial q_j} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} &\equiv \frac{\partial R}{\partial q_j} + \dot{p}_j \\
\frac{\partial K}{\partial p_j} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial K}{\partial \dot{p}_j} &\equiv \frac{\partial R}{\partial p_j} - \dot{q}_j \\
\frac{\partial K}{\partial r_l} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial K}{\partial r_l} &\equiv \frac{\partial R}{\partial r_l} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial R}{\partial r_l}.
\end{aligned}$$

Ik vermocht dit probleem niet algemeen op te lossen; het is echter duidelik, dat aan de vgln. voldaan wordt door elke K van de vorm:

$$K = \sum_1^k{}_m \left[\left(\frac{\partial D}{\partial q_m} - \frac{p_m}{2} \right) \dot{q}_m + \left(\frac{\partial D}{\partial p_m} + \frac{q_m}{2} \right) \dot{p}_m \right] + R + \text{const.}$$

waarin D een willekeurige funktie van de p's en de q's is. Voor het grensgeval $k = n$ waarbij de vergelijkingen van Hamilton door (59) geleverd moeten worden, is R te vervangen door H.

---

[29]) Vgl. J. DROSTE, Eine Bemerkung zu den Variationsprinzipien der Mechanik und der Physik. Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924.

Enige meermalen voorkomende vormen van D met de daarbij behorende K en de randvoorwaarden die men kan stellen, zijn:

D	K	Randvoorwaarden
$-\frac{1}{2}\sum_1^k{}^l p_l q_l$	$-\sum_1^k{}^l p_l \dot{q}_l + R$	$\Delta q_{l0} = \Delta q_{l1} = 0$
$+\frac{1}{2}\sum_1^k{}^l p_l q_l$	$+\sum_1^k{}^l \dot{p}_l q_l + R$	$\Delta p_{l0} = \Delta p_{l1} = 0$
0	$-\frac{1}{2}\Sigma\,(p_l \dot{q}_l - \dot{p}_l q_l) + R$	$\Delta(p_{l0}/q_{l0}) = \Delta(p_{l1}/q_{l1}) = 0.$

Voorbeeld: B. Mechanika

Het is speciaal in de mechanika dat de besproken transformaties het eerst hebben plaats gehad. De grootheden

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{60}$$

worden hier genoemd *momenten;* de namen „funktie van ROUTH" en „funktie van HAMILTON" worden speciaal voor de mechanika gebruikt.

Aan de grote betekenis van de vergelijkingen van HAMILTON moge slechts herinnerd worden door het noemen van enige literatuur over dit onderwerp [30]). Speciaal voor de beweging van elektronen in een elektromagneties veld (vgl. blz. 8) hebben ook de vergelijkingen van HAMILTON veel toepassing gevonden [31]).

De definitie van H maakt mogelik de randtermen van ΔI eenvoudiger te schrijven (vgl. (18))

$$\Delta I = \left[H\,\Delta\xi + \sum_1^n{}^i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\,\Delta q_i \right]_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \sum_i \Gamma_i\,\Delta q_i \tag{61}$$

waarin Γ_i de linkerzijde van de vergelijkingen van LAGRANGE voorstelt (52).

---

[30]) Zie b.v. FUES, Störungstheorie, Handb. d. Physik V, blz. 131; BORN, Atommechanik.

[31]) Vgl. b.v. SOMMERFELD, Phys. ZS. **17** (1916), blz. 498; DEBIJE, Phys. ZS. **17** (1916) blz. 513; BURGERS, Het Atoommodel van Rutherford-Bohr (1918); P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. 111 (1926), blz. 411; W. GORDON, ZS. f. Phys. **40** (1927), blz. 117; O. KLEIN, ZS. f. Phys. **41** (1927), blz. 407.

Van de genoemde andere minimumformuleringen zijn er in de mechanika slechts weinige gebruikelik; voornamelijk het *minimumprincipe van* HELMHOLTZ, dat de volledige kanoniese vergelijkingen levert:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} \partial\xi \; [H - \Sigma p\dot{q}] = 0 \tag{62}$$

We zagen reeds, dat het zich ook laat schrijven:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi[H + \Sigma\dot{p}q] = 0 \text{ of } \delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi[H - \tfrac{1}{2}\Sigma p\dot{q} + \tfrac{1}{2}\Sigma\dot{p}q) = 0$$

14 — Principe van Hilbert en principe van de kleinste werking [32])

Er zijn in de mechanika nog enkele andere formuleringen gebruikelik die voor biezondere gevallen grote waarde hebben, en uit het oorspronkelike principe als volgt kunnen afgeleid worden:

Voeg bij de integrand — wat natuurlik steeds geoorloofd is — een konstante, en wel H_0, de waarde, die H aan het begin van de beweging heeft. Daarmee wordt het principe:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} (F + H_0) d\xi = 0 \tag{63}$$

en de randtermen (vgl. blz. 33)

$$\{(-H + H_0)\,\Delta\xi + \Sigma p\,\Delta q\}\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} = (-H_1 + H_0)\,\Delta\xi_1 + (\Sigma p\,\Delta q)\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} \tag{64}$$

waardoor in de randvoorwaarden over $\Delta\,\xi_0$ niet meer behoeft te worden gesproken.

De volgende biezondere gevallen zijn nu van belang:

1°. de uitdrukkingen (8) voor x_j bevatten de tijd niet expliciet; dan is $\dot{x}_j$ homogeen lineair in de $\dot{q}$, dus T homogeen kwadraties in de $\dot{q}$. Volgens de stelling van Euler is dan

$$2T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} = \Sigma p\dot{q} \tag{65}$$

dus:

$$H = -L + \Sigma p\dot{q} = U - T + 2T = E \tag{66}$$

als E de totale energie van het mechaniese stelsel voorstelt.

---

[32]) Vgl. ook PLANCK, Kultur der Gegenwart, (Physik), blz. 692; Voss, Enz. der math. Wiss. IV 1, blz. 1; NORDHEIM, Handb. d. Physik, blz. 76; v. HELMHOLTZ, t.a.p.

Ons principe (63) gaat dan over in:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} (L + E_0)\, d\xi = 0 \tag{67}$$

het *principe van* HILBERT [33]) dat in woorden aldus geformuleerd kan worden: van alle bewegingen met vaste beginenergie E_0 en vaste begin- en eindkoördinaten en vaste eindtijd is de natuurlike beweging diegene die bovenstaande voorwaarde vervult. Zo geformuleerd is het ekwivalent met het principe van Hamilton; alleen is in plaats van de vaste begintijd de vaste beginenergie gekomen.

Men kan de voorwaarde van de vaste eindtijd eveneens laten vallen, doch dan moet daarvoor in de plaats geëist worden:

$$-E_1 + E_0 = 0 \tag{68}$$

dus: begin- en eindenergie gelijk en vast.

2°. Bovendien bevat de U de tijd niet expliciet. Dan is $\frac{dH}{d\xi} = \Sigma \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} +$ $+ \Sigma \dot{q} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$, daar $\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0$, we hebben met een konservatief stelsel te doen. In plaats van E_0 kan nu geschreven worden E, en ons principe (67) gaat over in:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} (L + E)\, d\xi = 0$$

of

$$\delta\, 2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} T\, d\xi = 0 \tag{69}$$

het zgn. *„principe van de kleinste werking"*, waarbij als randvoorwaarden nu, daar nu aan (68) voldaan is, alleen de $\Delta q = 0$ voor begin- en eindstand geëist behoeven te worden. De duur der bewegingen waarmee vergeleken wordt kan dus willekeurig zijn; de energie kan echter niet gevariëerd worden.

Neemt men in bovenstaande formule als onafhankelik veranderlike de afgelegde weg s in plaats van de tijd — geoorloofd als de snelheid voortdurend dezelfde is — dan levert het principe (69) de *geodetiese lijn*.

15 — Integrand met hogere afgeleiden

Van enkele der bovenverkregen resultaten willen we de analoga — voor zover ze te vinden zijn — vermelden voor het eenvoudigste geval met hogere afgeleiden (vgl. blz. 18).

Om tot een funktie H te geraken die slechts afgeleiden van één orde lager bevat dan de F, is het nu nodig, twee soorten p's in te voeren, nl.:

$$p_i^0 = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_i} \tag{70}$$

en

$$p_i^1 = \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_i} \tag{71}$$

---

[33]) Vgl. L. NORDHEIM und E. FUES, Die Hamilton-Jacobische Theorie, Handb. d. Physik V, blz. 118.

Lost men nu $\ddot{q}_i$ op uit de laatste vgl. en vormt

$$H = [-F + \Sigma p^0 \dot{q} + \Sigma p^1 \ddot{q}]_{\ddot{q}=g} \tag{72}$$

waarin weer $\ddot{q}$ vervangen is door de daarvoor gevonden funktie $g(p^1, q, \dot{q})$, dan leidt men gemakkelik of de *„kanoniese vergelijkingen."* [34])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= -\dot{p}^0 & \frac{\partial H}{\partial p^0} &= \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} &= -\dot{p}^1 & \frac{\partial H}{\partial p^1} &= \ddot{q} \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Vraagstukken waarbij $F = \Phi - \Sigma Qq$

Men kan vragen in hoeverre de op blz. 29 genoemde „andere formulering" van het enkelvoudige minimumvraagstuk waarbij F de boven aangegeven vorm heeft, een analogon bezit voor de variatieproblemen van die gedaante.

Ter beantwoording van deze vraag zij gewezen op de formele overeenstemming tussen (I) dergelijke variatieproblemen en (II) het variatieprobleem zonder Q's voor integrand met afgeleiden van één orde hoger. Deze overeenstemming blijkt bij naast elkaar stellen van:

I	q	Q	p
II	$\dot{q}$	p^0	p^1

Evenals het nu bij geval II nodig was twee soorten p's in te voeren om tot de „andere formulering" van blz. 35 te geraken, is het in geval I nodig, in deze andere formulering zowel p èn Q te verwachten. Een formulering alleen met de Q's is onmogelik.

Voert men de reeds aangegeven (blz. 30) transformaties in geval I uit, dan komt men tot de „kanoniese" formules:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \qquad \frac{\partial H}{\partial Q} = q \tag{74}$$

waarin

$$H = [-\Phi + \Sigma Qq + \Sigma p\dot{q}]_{\dot{q}=f} \tag{75}$$

Komen geen $\dot{q}$ voor, dan gaan deze formules over in de in § 11 genoemde.

16 — Meervoudige integralen

De beschouwingen, gegeven onder 12 zijn, mutatis mutandis, ook op deze kategorie toepasselik. Ter wille van de leesbaarheid zullen we de afleiding slechts geven voor de kanoniese vergelijkingen. De oorspronkelike differentiaalvgln. luidden:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \sum_1^\nu \lambda \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} = 0 \qquad (i = 1 \ldots . n) \tag{6}$$

(voor de notatie zie blz. 1).

---

[34]) L. KÖNIGSBERGER, J. f. Math. **124** (1902), blz. 202 e.v.

We voeren nu in de grootheden:

$$p_{i\lambda} = \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \qquad (i = 1 \ldots n,\ \lambda = 1 \ldots \nu) \tag{76}$$

en vormen de funktie

$$H(q_i, p_{i\lambda}) = [\sum_{1}^{n} i \sum_{1}^{\nu} \lambda\, p_{i\lambda}\, q_{i\lambda} - F]_{q_{i\lambda} = f_{i\lambda}} \tag{77}$$

waarin alle $q_{i\lambda}$ zijn vervangen door de uitdrukkingen die men krijgt door de vgln. (76) op te lossen naar $q_{i\lambda}$:

$$q_{i\lambda} = f_{i\lambda}\,(p,\ q) \tag{78}$$

We vinden nu:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{1}^{n} l \sum_{1}^{\nu} \lambda\ p_{l\lambda}\ \frac{\partial f_{l\lambda}}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} - \sum_{1}^{n} l \sum_{1}^{\nu} \lambda\ \frac{\partial F}{\partial q_{l\lambda}}\ \frac{\partial f_{l\lambda}}{\partial q_i} = - \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

en analoog:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i\lambda}} = q_{i\lambda}$$

waardoor de differentiaalvgln. en de „definitievgln." (76) vervangen kunnen worden door het daarmee gelijkwaardige stel

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \sum_{1}^{\nu} \lambda\ \frac{\partial p_{i\lambda}}{\partial \xi_\lambda} \tag{79}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i\lambda}} = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\lambda} \tag{80}$$

$$(i = 1 \ldots . n,\ \lambda = 1 \ldots . \nu)$$

die we de **(gegeneraliseerde) kanoniese vergelijkingen** [35]) kunnen noemen. Merkwaardig is hierbij, dat er nu meer vgln. zijn waar H naar p gedifferentiëerd wordt, dan waar H naar q wordt gedifferentiëerd; de gelijkheid van de aantallen p's en q's is blijkbaar een toevallige eigenschap bij de enkelvoudige integralen.

Opmerking. Ook nu is het weer mogelik, slechts een gedeelte der $q_{i\lambda}$ door $p_{i\lambda}$ te vervangen, zoals bij de transformatie van ROUTH geschiedde. Men krijgt dan weer een gedeelte der vgln. in kanoniese vorm, een ander deel houdt de oorspronkelike vorm.

Ook de gegeneraliseerde kanoniese vgln. zijn direkt uit een

---

[35]) L. KÖNIGSBERGER, Die Prinzipien der Mechanik, blz. 101, vlg. (7).

minimumprincipe af te leiden, analoog met dat van HELMHOLTZ, nl. uit

$$\delta \int\int \ldots \int_{G} d\xi_1 \ldots d\xi_\nu \left(\sum_{1}^{n} i \sum_{1}^{\nu} \lambda \, p_{i\lambda} \, q_{i\lambda} - H \right) = 0 \qquad (81)$$

We laten hieronder de toepassing dezer formules op twee gebieden volgen.

A — *Elasticiteitsleer*

De evenwichtsvergelijkingen voor een isotroop elasties kontinuum waren af te leiden uit een minimumprincipe waarvan de F gedefiniëerd werd op blz. 6.

Wanneer we hier de p_{ik} willen gaan invoeren, stuiten we op een eigenaardigheid, nl. dat tengevolge van het voorkomen van q_{ik} en q_{ki} in slechts één kombinatie

$$q_{ik} + q_{ki}$$

de uitdrukkingen voor p_{ik} en p_{ki} volkomen identiek worden, waardoor het oplossen naar elk der q_{ik} onmogelik wordt. Daar $p_{ik} = K_{ik}$ de spanning in de richting i werkend op een vlakje $\perp k$, is dit in volkomen overeenstemming met de bekende betrekking $K_{ik} = K_{ki}$.

Het blijkt echter toch mogelik, vergelijkingen te konstrueren die met de kanoniese vergelijkingen zeer verwant zijn, op de volgende wijze:

Slechts die p_{ik} worden ingevoerd, waarvan (bv.) $i \lesseqgtr k$; gevormd wordt

$$H = [\sum_{i<k}^{i} \sum^{k} p_{ik} \, (q_{ik} + q_{ki}) + \sum^{i} p_{ii} \, q_{ii} - F]$$

waarin $q_{ik} + q_{ki}$ door $f(q_i, p_{ik})$ vervangen worden kan. De kanoniese vergelijkingen worden nu:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \sum_{k} \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi_k} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{ik}} = q_{ik} + q_{ki}.$$

Voert men dit procédé uit voor de bovengenoemde F, dan vindt men:

$$p_{11} \equiv K_{11} = A(q_{11} + q_{22} + q_{33}) - 2B(q_{22} + q_{33})$$
$$p_{23} \equiv K_{23} = B(q_{23} + q_{32}) = p_{32}, \text{ enz.}$$

$$H = \frac{1}{4B}\sum_1^3 {}^i p_{ii}^2 + \frac{A-2B}{4B(-3A+8B)}\left(\sum_1^3 {}^i p_{ii}\right)^2 + \frac{1}{2B}\left(p_{23}^2+p_{31}^2+p_{12}^2\right) + \sum_1^3 {}^i K_i q_i \quad (82)$$

De fysiese betekenis van de onmogelijkheid om de q_{ik} en de q_{ki} apart te bepalen — ook uit de evenwichtsvgln. — is, dat door de elastiese evenwichtsvoorwaarden de toestand van het kontinuum niet volkomen bepaald wordt. Deze vergelijkingen worden nl. niet verstoord door toevoeging aan de q_i van u_i welke voldoen aan:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} = 0 \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} = 0$$

waarvan dè meest algemeene oplossing is:

$$\begin{aligned} u_1 &= & -\alpha_3\,\xi_2 + \alpha_2\,\xi_3 \\ u_2 &= \alpha_3\,\xi_1 & -\alpha_1\,\xi_3 \\ u_3 &= -\alpha_2\,\xi_1 + \alpha_1\,\xi_3 & \end{aligned}$$

d.i. een willekeurige draaiïng.

G — *Elektromagnetiese veldvergelijkingen*

Wanneer men de bij het op blz. 7 gegeven minimumprincipe behorende kanoniese vergelijkingen wil opstellen, stuit men op een dergelijke moeilikheid als bij de elasticiteitsvergelijkingen, met dit onderscheid dat nu in F alleen de kombinatie

$$A_{ik} - A_{ki}$$

optreedt. Men vindt daardoor

$$p_{ik} \equiv -p_{ki} = A_{ik} - A_{ki} = F_{ki}$$

Door een procédé analoog met het bij het elastiese probleem hierboven gebruikte kan men nu vormen:

$$H = \sum_1^4 {}^i s_i\, A_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i,k} p_{ik}^2 \qquad (83)$$

waarbij nu nog komt dat $p_{ii} \equiv 0$ zodat er maar 6 verschillende p_{ik} bestaan, in overeenstemming met het bekende feit, dat er maar zes F_{ik} bestaan. De kanoniese vergelijkingen worden nu:

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = -\sum_1^4 {}^k \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi_k} \qquad \text{of} \qquad s_i = \sum_1^4 {}^k \frac{\partial F_{ik}}{\partial \xi_k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{ik}} = \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \qquad \text{of} \qquad F_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i}$$

d.w.z. deze vormen het **volledige stelsel** der veldvergelijkingen.

Het minimumprincipe, analoog met dat van HELMHOLTZ voor de mechanika, nl.

$$\Delta \iiiint d\xi_1 \ldots d\xi_4 \left[-\sum_i s_i A_i + \sum_{i,k} F_{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} + \tfrac{1}{2} F_{ik} \right) \right] = 0$$

levert ons dus eveneens alle veldvergelijkingen.

Opmerking

Zowel de elektromagnetiese als de elastiese vgln. laten zich beschouwen als biezonder geval van een vraagstuk waarbij F de meer algemene gedaante heeft:

$$F = -\Sigma a_i q_i + \tfrac{1}{2} \Sigma b_{ik} (q_{ik} + q_{ki})^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \beta_{ik} q_{ii} q_{kk} + \tfrac{1}{2} \Sigma c_{ik} (q_{ik} - q_{ki})^2$$

waarbij de sommatie bij de b_{ik} en c_{ik} uit te strekken is over elke kombinatie $i\,k$, bij de β_{ik} echter over elke i en elke k. Men verkrijgt uit deze vorm door:

1°. $b_{ik} = \beta_{ik} = 0$ te stellen de elektromagnetiese, en door

2°. $c_{ik} = 0$ te stellen de elastiese vgln.

Bij deze vorm van de F treden geen anomaliteiten op bij het invoeren van de „momenten", want nu is:

$$p_{ik} = \frac{\partial F}{\partial q_{ik}} = b_{ik} (q_{ik} + q_{ki}) + c_{ik} (q_{ik} - q_{ki}) =$$

$$= (b_{ik} + c_{ik}) q_{ik} + (b_{ik} - c_{ik}) q_{ki}$$

terwijl

$$p_{ki} = (b_{ik} - c_{ik}) q_{ik} + (b_{ik} + c_{ik}) q_{ki}$$

dus

$$p_{ki} \neq p_{ik}$$

Men vindt voor de kanoniese funktie:

$$H = \sum a_i q_i + \sum \frac{1}{8 b_{ik}} (p_{ik} + p_{ki})^2 + \tfrac{1}{2} \sum\sum B_{ik} p_{ii} p_{kk} + \sum \frac{1}{8 c_{ik}} (p_{ik} - p_{ki})^2.$$

Grensgeval 1 verkrijgt men hier door te bedenken, dat niet alleen b_{ik} en $B_{ik} = 0$ worden, maar ook $p_{ik} + p_{ki}$ waardoor de tweede som in H toch wegvalt.

Evenzo valt voor grensgeval 2 de laatste som weg, in overeenstemming met (82) en (83).