



## Report of the Varese Meeting, September 6-8, 1950

*Econometrica*, Vol. 19, No. 2. (Apr., 1951), pp. 190-219.

Stable URL:

<http://links.jstor.org/sici?sici=0012-9682%28195104%2919%3A2%3C190%3AROTVMS%3E2.0.CO%3B2-R>

*Econometrica* is currently published by The Econometric Society.

---

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/about/terms.html>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/journals/econosoc.html>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

---

JSTOR is an independent not-for-profit organization dedicated to and preserving a digital archive of scholarly journals. For more information regarding JSTOR, please contact [support@jstor.org](mailto:support@jstor.org).

## REPORT OF THE VARESE MEETING

SEPTEMBER 6-8, 1950

THE EUROPEAN meeting of the Econometric Society was held in Varese, Italy, September 6-8, 1950. Professor Felice Vinci, Università degli Studi di Milano, accepted appointment as chairman of the program committee and responsibility for preparation of the report. Other members of the program committee included Professor R. G. D. Allen, London School of Economics; Professor Ragnar Frisch, University of Oslo; Professor René Roy, Institute de Statistique de l'Université de Paris; and Professor Eraldo Fossati, Università degli Studi di Trieste, who undertook the responsibility for local arrangements.

Following is the program with abstracts of the papers and discussions, preceded by an index of speakers.

ALLAIS, M.: <i>De quelques propriétés de l'impôt sur le capital</i> .....	215
BACHET, N.: <i>Utilité et tarifs des services publics</i> .....	201
BIGNARDI, F.: <i>Quelques éléments d'une théorie statistique des erreurs de proportion</i> .....	217
BOITEUX, M.: <i>Tarifification des demandes aléatoires</i> .....	200
DIVISIA, F.: <i>Sur la demande de l'or et plus généralement des biens durables</i> ...	202
GOODWIN, R. M.: <i>Iteration, Automatic Computers, and Economic Dynamics</i> .	196
GUILBAUD, G. T.: <i>Calcul symbolique et calculs financiers</i> .....	192
HAGSTROEM, K.-G.: <i>Développement récent de l'indice d'égalité de la loi parétienne des revenus</i> .....	212
HOUTHAKKER, H. S., <i>see</i> J. TOBIN.....	207
KLAASSEN, L. H.: <i>The Economics of City Planning</i> .....	213
KOOPMANS, T. C.: <i>Recent Developments in the Theory of Production</i> .....	190
LERNER, A. P.: <i>Wage Policy in Full Employment</i> .....	210
MILHAU, J.: <i>Enquête par sondage en milieu agricole</i> .....	218
NATAF, A.: <i>Remarques sur les fonctions de production</i> .....	192
ROY, R.: <i>La demande des biens indirects</i> .....	203
SAUVY, A.: <i>Relations entre la structure de la consommation et le niveau optimum d'une population</i> .....	208
STONE, R.: <i>The Demand for Food in the United Kingdom</i> .....	204
TINBERGEN, J.: <i>A Comparative Study of Two Decision Models: Frisch's Model and a Simple Dutch Planning Model</i> .....	194
TOBIN, J., AND H. S. HOUTHAKKER: <i>The Effects of Rationing on Demand Elasticities</i> .....	207
VERDOORN, P. J.: <i>On an Empirical Law Governing the Productivity of Labor</i> .	209
VIANELLI, S.: <i>Sur la théorie statistique des combinaisons héréditaires</i> .....	216
VINCI, F.: <i>On the General Theory of Economic Systems</i> .....	198

\* \* \*

*Recent Developments in the Theory of Production*, T. C. KOOPMANS, Cowles Commission for Research in Economics and The University of Chicago.

DEFINE a *production function* as the largest amount of product that can be obtained from given amounts of factors. This definition allows *substitution* between factors. In the special case of limitational factors such substitution is not possible. The definition quoted above presupposes a maximization process which we shall study explicitly.

*Commodities and activities*: An activity converts certain commodities into certain other commodities in fixed ratios between outputs and inputs (negative outputs):  $y_k = a_k x_i$ ;  $y_k$  = net output of  $k$ th commodity from  $i$ th activity;  $x_i$  = level of  $i$ th activity;  $a_{ki}$  = technical coefficient.

*Divisibility*: All values  $x_i \geq 0$  are permitted. A finite set of basic activities is represented by a technology matrix  $A$ . The technology matrix refers to a country, an industry, a firm, or a department of a firm.

*Additivity*:  $y_k = \sum_i a_{ki} x_i$  or  $y = Ax$ , where  $y_k$  is total net output of  $k$ th commodity from all activities, and  $y$  and  $x$  are column vectors.

*Possible points* in the commodity output space are all points  $y = Ax$  such that  $x_i \geq 0$  for all  $i$ . The set  $(A)$  of all such points forms a convex polyhedral cone spanned by the column vectors  $a_{(i)}$  of  $A$ .

*Efficient points* (without availability restrictions) are points  $y = Ax$ ,  $x_i \geq 0$ , such that, if  $\bar{y} = A\bar{x}$ ,  $\bar{x}_i \geq 0$ , then either  $\bar{y} = y$ , or  $y_k > \bar{y}_k$  for some  $k$ . The set  $S$  of efficient points consists of those boundary points of  $(A)$  that possess a positive normal  $p$ , i.e., a vector  $p$  normal to  $(A)$  such that  $p_k > 0$  for all  $k$ . The concept of *efficient point set* generalizes the concept of the production function.

When determinate, the  $p_k$  can be interpreted as *marginal rates of substitution*. Corresponding concepts can be introduced when availability restrictions on primary, intermediate, and final commodities are introduced: The possible point

$$y = \begin{bmatrix} y_{\text{fin}} \\ y_{\text{int}} \\ y_{\text{pri}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\text{fin}} \\ A_{\text{int}} \\ A_{\text{pri}} \end{bmatrix} x = Ax, \quad x_i \geq 0$$

(where  $y_{\text{fin}}$ ,  $y_{\text{int}}$ ,  $y_{\text{pri}}$  are column vectors of net outputs) is called *attainable* if  $y_{\text{fin}} \geq 0$ ,  $y_{\text{int}} = 0$ ,  $y_{\text{pri}} \geq \eta_{\text{pri}}$ , where the components of  $\eta_{\text{pri}}$  are negative and represent availability limits. (Inequalities between vectors apply to all components.) An attainable point  $y$  is called *efficient* if, whenever  $\bar{y}$  is attainable, either  $\bar{y}_{\text{fin}} = y_{\text{fin}}$  or  $y_k > \bar{y}_k$  for some  $k$  corresponding to a final commodity. An attainable point  $y$  is efficient if and only if it possesses a normal  $p$  to  $(A)$  such that  $p_{\text{fin}} > 0$ ,  $p_{\text{pri}} \geq 0$ ,  $p_k = 0$  if  $y_k > \eta_k$  (free commodities),  $k$  primary.

For  $p$  to be a normal to  $(A)$  on the point  $y = Ax$ ,  $x_i \geq 0$ , it is necessary and sufficient that  $p'a_{(i)} = 0$  if  $x_i > 0$ ,  $p'a_{(i)} \leq 0$  if  $x_i = 0$ . This leads

to an interpretation of the  $p_k$  as *efficiency prices* that can be used for decentralization of allocative decisions.

DISCUSSION: In this very interesting application of the theory of matrices the author has in mind a notion of substitution of the factors that is different from the customary one. Substitution enters into the model in the form of a simultaneous variation of the levels of several discrete activities in such a manner that the efficiency of the combination of activities is preserved.

*Remarques sur les fonctions de production*, A. NATAF, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

AU LIEU de considérer que la production d'un bien  $A$  est une fonction de forme simple des facteurs de production  $x_i$ , nous mettons en évidence que, selon le procédé de fabrication employé, les quantités  $x_i$  sont des fonctions univoques de la quantité  $A$  à produire. Pour une notable partie ces fonctions sont linéaires. D'autre part la forme des fonctions et leur nature physique change de façon discontinue lorsqu'on change de procédé.

Nous en déduisons que: du point de vue théorique, les résultats sur l'efficacité physique maximum d'un facteur de production ne tiennent pas et que le problème du choix entre deux procédés de fabrication dépend de critères économiques portant en particulier sur l'avenir économique, prévu ou organisé; du point de vue statistique, (1) l'existence de relations linéaires risque d'étouffer les relations non linéaires, chaque fois que l'on essaye un ajustement linéaire, (2) au lieu d'expliquer analytiquement et physiquement la production future par l'état des productions passées, on doit obtenir de meilleurs résultats en expliquant par la grandeur de la production de l'avenir la part de la production passée qui y est justement consacrée.

DISCUSSION: En soulignant le caractère discret des méthodes alternatives de production il faudrait considérer la possibilité de sommes pondérées des facteurs de production. La variation continue des poids introduirait la continuité dans les substitutions des emplois productifs et des productions.

*Calcul symbolique et calculs financiers*, G. T. GUILBAUD, Institut de Science Economique Appliquée, Paris.

LE PASSAGE de la statique à la dynamique présente de nombreuses difficultés: celles qui se rapportent à la complication des instruments mathématiques ne sont pas les moins redoutables. Quand le mouvement du système économique est permanent (stationary flow), chaque flux constant est caractérisé par un nombre unique  $F$ , et tout se passe, dans les calculs et le raisonnement, comme s'il n'y avait pas de mouvement du tout. En dynamique véritable, chaque flux et chaque stock a une "histoire", dont la description exige une succession de nombres, ou

“chronique”:  $F(0), F(1), F(2), F(3), \dots$ ; c'est-à-dire une fonction du temps:  $F(t)$ . On passe donc du calcul algébrique ordinaire au calcul fonctionnel, dont le maniement est plus délicat.

Si les électriciens et les probabilistes utilisent aujourd'hui de façon systématique la transformation de Laplace (et sa proche parente, celle de Fourier), il ne semble pas que l'économétrie en fasse un grand usage. C'est d'autant plus étonnant que l'idée originelle peut être présentée comme une simple transposition de la comptabilité des opérations financières à long terme, et qu'ainsi le calcul “symbolique” est susceptible d'une interprétation concrète fort simple.

Imaginons que les éléments de la chronique  $F$  soient des quantités de monnaie, et que ces sommes soient versées, chacune en son temps, en un compte productif d'intérêt. On peut alors calculer la valeur actuelle de l'ensemble des versements successifs en fonction du taux de l'intérêt; désignons par  $p$  la valeur actuelle d'une somme unité payable dans un délai unité (un franc payable en un an, quantité liée de façon simple au taux); la valeur actuelle cherchée est donc:

$$\text{val. act. de } F = V(p) = F(0) + F(1) \cdot p + F(2) \cdot p^2 + F(3) \cdot p^3 + \dots$$

On établit ainsi une correspondance entre les chroniques qui sont des fonctions du temps  $F(t)$ , et de nouvelles fonctions (polynômes ou fonctions entières) de la variable  $p$ . Toute opération sur  $F$  se traduit par une opération sur  $V$ : en particulier une opération linéaire, par exemple une moyenne mobile, se traduit par une simple multiplication.

Dans un “réseau” quelconque de circulation financière, en pose que les divers flux sont liés, tant par des équations de conservation (bilans comptables) que par des équations de comportement (propensions diverses, politiques de liquidité, etc.); ces liaisons entre les chroniques ont leur traduction sous forme de liaisons entre les valeurs actuelles; dans le cas où l'on se contente d'équations linéaires (avec retards quelconques), la traduction est toute entière algébrique et la résolution facile.

Il est clair qu'en économétrie les schémas déterministes sont insuffisants et il faut sortir du domaine strictement linéaire: pour définir les approximations, par exemple, c'est-à-dire le voisinage entre deux chroniques, la considération des valeurs actuelles ne suffit pas, il faut quelque chose de plus, par exemple la somme des carrés des différences, c'est-à-dire un opérateur quadratique. Ce n'est pas difficile: si  $V(p)$  est la valeur actuelle correspondant à la chronique  $F(t)$ , en formant le produit de  $V(p)$  par  $V(1/p)$  en verra apparaître non seulement la variance de la chronique  $F$  (somme des carrés) mais tous les coefficients d'autocorrélation, c'est-à-dire le corrélogramme. Si l'on ne craint pas d'introduire les nombres imaginaires (qui jouent un rôle transitoire, comme en électrotechnique) en rejoint facilement l'analyse harmonique. Cette méthode

éclaire la nature des phénomènes découverts par Slutsky en 1927: certains traitements simple (moyennes mobiles) appliqués à des chroniques purement aléatoires (tirages au sort) fournissent soit des chroniques quasi-régulières, soit des chroniques apparemment semblables à celles que donne l'observation économique. Il suffit de raisonner sur les valeurs actuelles (qui sont alors aléatoires).

*A Comparative Study of Two Decision Models: Frisch's Model and a Simple Dutch Planning Model*, J. TINBERGEN, Ecole des Sciences Economiques de Rotterdam.

THE SIGNIFICANCE of Frisch's notion of decision models is, in the first place, that they draw full attention upon "inverted problems" which economic policy puts before us. In these problems the data are no longer those in the traditional economic problems, but partly the political goals of economic policy such as a certain volume of employment, equilibrium in the balance of payments, a certain standard of life, etc. Unknowns, on the other hand, are a number of political parameters such as tax tariffs of different types or the exchange rate.

A second point of great importance is the treatment of "demand and supply pressure." For the further future it must be feared that in the labor market in many countries supply pressure will again prevail, meaning that the supply equation of labor will not play a role in the models for employment policy.

A third question of great importance concerns the degree of "autonomy" of the various relations in the model. Frisch introduced relations with maximum autonomy, meaning, e.g., that he goes down to the employers' and the workers' ophelimity functions instead of using semi-empirical demand and supply relations. Against the advantage of higher autonomy there may, however, be the disadvantage of these relations' not being accessible to statistical measurement.

A further point of comparison between the models under discussion must be a list of the political parameters and the political goals involved.

In the practice of economic planning in The Netherlands the question was of some significance to what extent quantitative planning and price planning may be independent of each other. This evidently depends on the structure of the model, and it seems quite possible to use as a first approximation a model where quantities and prices can be determined independently of each other. This is only true, however, since in The Netherlands the volume of investments is considered to be given in view of its high priority.

Roughly the argument runs as follows. The political goal of high employment determines the volume of production. A technical proportion between production and imports determines the latter. With given im-

port prices the value of imports is fixed. From the E.R.P. help the value of exports necessary to balance the foreign accounts follows. The given demand relation between export prices and volume fixes export quantities. Now if the volume of investment is also given, consumption volume follows as the only unknown item in the balance: *total gross production = consumption + investment + exports*. This would no longer apply as soon as investment were left to the free forces and not made a major point of policy.

The price-wage-tax structure must now be designed in such a way that the above "physical national budget" will be approximated as much as possible.

Conclusions from the Dutch model are as follows:

(i) Wage policy as the only means of equilibrating the balance of payments is an inefficient policy; it tends to increase nonworkers' consumption and hence to close the balance of payments gap only slowly.

(ii) A similar conclusion applies to price regulation only.

(iii) Even a combination of the two, as, e.g., by devaluation only, is not a very efficient policy. As long as unused capacity is present, there is a tendency to an increase in home consumption which again represents a counteracting force.

(iv) Therefore, a combination of devaluation with increased taxation on home consumption is a more efficient policy. A 15% devaluation and a 3% decrease in national expenditure would seem sufficient to solve the balance of payments problem as it existed before the devaluation. Of course, these numerical conclusions are subject to a certain margin of uncertainty and should not be detached from the assumptions upon which they are based.

**DISCUSSION:** In respect of the degrees of freedom, there is a fundamental difference between the Walras-Pareto approaches and the new decision models. Even in those approaches the possibility of a certain kind of economic policy exists, namely, that of influencing the coefficients in the demand equations apart from changes in additive parameters; but, neglecting the different hypotheses and other considerations, tax rates are not among the data, and in nonlinear systems, moreover, the policy parameters would not necessarily be additive parameters only.

No doubt in logic the problem of analysis—stating the behavior of a system given the structure—is the same as that of synthesis—stating the structure required to produce a given behavior. In practice, however, engineers have found it difficult to arrive at a desired behavior by analyzing numerous trial structures. If the system of equations is not too complicated, it has been found possible to synthesize directly a system which has the desired characteristics.

The construction of decision models is at bottom the analytic coordination of the statistical relations in an economic order with reference to given private or public purposes. The econometric theory of these models will be a synthesis of the so-called inductive, forecasting economics, which young people ought to cultivate widely to avoid past deceptions and mistakes.

*Iteration, Automatic Computers, and Economic Dynamics*, R. M. GOODWIN, Harvard University.

IN THE continuing effort to erect a useful dynamic we need all possible helpful sources of hypotheses. One such is the traditional mathematical device of solving equations by trial and error and its vigorous modern stepchild, the computing machine or zeroing servomechanism.

It always takes time to solve an equation by approximative methods and, if our methods for determining the successive steps are made analogous to the structure of actual economic decisions, then we may regard the sequence of steps as entirely analogous to an actual process of economic dynamics in time. If the approximations converge to the correct answer, the corresponding economic entity is dynamically stable. We have found the answer when our trial input is correct with zero error, which is signaled by our getting back the same values we put in. Similarly, when an economy produces the right amount, it will keep repeating this quantity (a stationary solution) until disturbed.

As a trivially simple example, consider the static multiplier,

$$y = c(y) + i,$$

where  $y$  is income,  $c(y)$  the consumption function, and  $i$  the investment. To find a root or solution of the equation we may simply try a value,  $y_0$ , on the right-hand side, and then take the resulting value,  $y_1$ , on the left-hand side and use it as a basis for a second trial, and so on; thus

$$\begin{aligned} y_1 &= c(y_0) + i, \\ y_2 &= c(y_1) + i, \\ &\dots\dots\dots \\ y_t &= c(y_{t-1}) + i. \end{aligned}$$

The result is the dynamical multiplier. It will converge to a repeating value of  $y$  if  $dc/dy$  is less than unity, which is the dynamical stability condition of the multiplier.

A modern automatic control device (servomechanism) uses the error between actual result and desired result as a basis for further adaptation in such a way as to reduce the error and thus attain the desired value. Human beings may be regarded as complicated servomechanisms (cf. N. Wiener, *Cybernetics*) and the direct applicability to a wide variety of economic response mechanisms is evident. That the multiplier is one such can be seen by rewriting it as

$$y_t - y_{t-1} = \Delta y = i - [y_{t-1} - c(y_{t-1})].$$

Thus investment is the input, savings the output, and income is changed so as to narrow the gap between them. Why is the computing never



finished; why is it not possible to settle down to a stationary state to which we could apply static theory with less embarrassment? To provide an answer to this question is one of the key problems of economic dynamics. The answer must be either, or both, of two kinds: (a) the problem asked is always changing, so we are always faced with new ones before we have settled the old; (b) the methods of seeking for a solution are faulty (an unstable equilibrium point).

As a second example, consider the theory of an isolated market. To prove the existence of a solution, Walras stated an iterative method of approximation and thus generated a lot of confusion. From the explicit point of view of this paper, his method may be turned into a fruitful source of dynamical theory. Letting the demand curve be  $q_d = q_d(p)$ , and  $q_s = q_s(p)$  the supply curve, we seek a price,  $p$ , such that

$$q_d(p) - q_s(p) = 0.$$

To find it by iteration we may proceed as follows:

$$p_1 = q_d(p_0) - q_s(p_0) + p_0,$$

and so on. Walras begins with *prix criés au hasard* (arbitrary initial value  $p_0$ ) and proceeds by *tâtonnements*, raising the price if the demand is greater than the supply and lowering it if the reverse is true. That this is the case considered here may be seen from

$$p_t - p_{t-1} = \Delta p = q_d(p_{t-1}) - q_s(p_{t-1}).$$

By interchanging prices and quantities in this equation, we get the type of adjustment profoundly probed by Marshall.

Although it is harder to conceive, we may reason from continuous computers and thus deal in instantaneous rates instead of finite differences. In this way we get rapid approximations to continuously varying problems, e.g., automatic antiaircraft fire-control mechanisms. The application to economics is evident.

There exists another possibility which was overlooked by Walras and Marshall. Instead of having a pure price or a pure quantity adjustment, we may have a mixed process, and we recognize the familiar cobweb theorem (corn-hog cycle), which has been extensively investigated in our own time.

**DISCUSSION:** It is not difficult to regard economic dynamics roughly as a series of iterated trial solutions which succeed one another at realistically regular intervals of time. If the existing economic relations are such as to yield a stable system on that understanding, then an undisturbed mechanism will find its stationary solution; otherwise it will depart from it or forever oscillate about it.

The perfection of electronic and electro-mechanical computers "feed back" the errors as the basis for new trials and permit one to regard the motion of an economy as a process of computing the answers to the problems posed to it. It

follows a simplification of the known analyses of this subject (e.g., Samuelson) and particularly a clarification of the Walrasian *prix criés au hasard* and Keynesian equilibrium.

It was observed that the method of successive approximation is sometimes merely a device for solving a mathematical problem before it is known how to solve it in a finite number of steps and moreover that the number of markets where prices are actually determined by *tâtonnements* is small and decreasing because it becomes increasingly easier to obviate higgling and to rely on experience or research or the use of tenders. But it still remains true that the general interdependence of economic quantities means that the simple solutions are of limited use because when we solve one problem this upsets the solution of another. Here it seems that iterative solutions (whether obtained in advance by machine or determined empirically in the market) are probably necessary. It will be worth while for economists to investigate the concepts of servomechanisms as applied to markets. We are reasonably sure that people control their movements, drive automobiles, etc., by such methods, even though they cannot explain how they do it. Is it not likely that economic agents (entrepreneurs, etc.) adapt to the changing course of events (prices or quantities) in a similar manner? An important point is that it has been found that such an adaptation requires nothing more complicated than position and rate of change ("anticipation control") to make the most delicate adjustments.

The paper is concerned only with the theoretical field, but further improvements of the proposed method could permit its being applied to empirical systems, though their validity be limited by the shortness of "economic time." In this connection there is no doubt about our ability "to separate message from noise" in social statistics notwithstanding such short runs of data under constant conditions.

*On the General Theory of Economic Systems*, F. VINCI, Università degli Studi di Milano.

To BUILD up a general theory of economic systems, we think it necessary to multiply the utility (satisfaction) function  $y$  of every Consumption Unit by the utility price  $\pi_0$ ; so, referring to a given year and neglecting the new investments, we are in a position to write, for each C.U. distinctly taken, the expression

$$(1) \quad y\pi_0 - x_1\pi_1 - x_2\pi_2 - \cdots - x_m\pi_m .$$

The terms having minus signs represent the expenses, i.e., the  $m$  quantities  $x_i$  of goods and services consumed or used during the year, multiplied by the corresponding prices  $\pi_i$ . Among these have to be included the use prices of the durable goods and of the stocks of the non-durable goods belonging to the C.U. or hired by it and therefore also the interest that ought to be paid for keeping the money as cash.

Expression (1) has the same form as the difference between proceeds and costs of a concern and, in the perfect competition hypothesis, the amount of the said expenses will equal the income  $R$  of the C.U. The maximization process gives  $\pi_0 = dR/dy$ ; but in the monopoly hypothesis

of C.U. directly offering goods and services, we shall have  $\pi_0 + y(d\pi_0/dy)$  in place of  $\pi_0$ .

Admitting that the equilibrium point falls in such a branch of  $R(y)$  that the inverse function can be taken into consideration, we are led to consider the reciprocals and to deduce that  $1/\pi_0$  is equal to the utility marginal ratio with reference to the income in the competition hypothesis; but in the monopoly hypothesis the relation will not be so simple.

If someone is doubtful about the significance of the product  $y\pi_0$ , he may consider that, for instance, the purchase of a bottle of wine at Lit. 300 is not dependent upon the fact that the wine be measured in gallons or pounds or alcoholic degrees or in subjective inebriety degrees of enjoyment during a given consumption interval. According to the sensitiveness of the buyer and to his primitive or sophisticated and yet undisputable way of fractioning or graduating inebriety, the said expense may be the equivalent of 5 inebriety degrees  $z$  at Lit. 60 each, or of a different number of degrees computed on any other rising scale  $F(z)$  at the corresponding price. Indeed, any new price  $\pi$ , assumed in a general way with its own *elasticity or consistency coefficient*  $[zF'(z)/F(z)]$ , where  $F'(z) = 60/\pi$  and multiplied by  $F(z)$ , is bound to give an expense of Lit. 300. Such a coefficient concerning any two measure or scale units can safely be neglected should we admit that not even the economic impulse but just the contradiction principle in human behavior is likely to be a factor.

Considering a group of C.U.'s, we may replace (1) by the expression

$$(2) \quad \sum y\pi_0 - \sum x\pi,$$

where the first sum shall be deemed to include the entire group of C.U.'s and the second their total expenditure during the year.

If we assume that all expenses are separable and the utility of every C.U. is a function of its own expenses, expression (2) is split up into expressions (1), and the maximization process gives the known equations of the partial marginal ratios of utility for the individualistic system in perfect competition. In case we consider all expenses to be inseparable, it is a necessary hypothesis in regard to the mutual relations between the functions  $y$ .

Every hypothesis in respect of these functions is of course questionable, and the author limits himself to the statement that (2) represents analytically our empirical comparisons and also to the opinion that a good taxation theory may be built on the same ground, the econometric importance of which need not be stressed.

DISCUSSION: Multiplying the utility function by the reciprocal of marginal utility of money, a value comparable with income is obtained for every consumer; such a value allows interpretation of the consumer's comparisons between expenses

and satisfactions. From this follows the possibility of aggregating the said values. Every unit of measure or graduation is certainly arbitrary, and that may explain why some physiologists refer the prices of foodstuffs to protein, fats, etc., and some technologists refer wages to ability indexes, etc.

Concerning the nature of variables of a consumer's utility function, it was reasonable for the individualist economists of eighty years ago to consider only commodities required by such a consumer and not the remaining consumers' utilities also. However, the case of utilities obtained at common expense by consumer groups on the basis of given utility functions is similar to that of commodity groups produced at common cost on the basis of given production functions. In both cases there must not be many groups; otherwise we suppose a mankind different from what it was and is. It remains to explain the role of representative government in distributing the shares of the common expense for group enjoyment of a large number of commodities.

*Tarifcation des demandes aléatoires*, M. BOITEUX, Service Commercial National d'Electricité de France.

LA THÉORIE classique de la vente au coût marginal conduit à des paradoxes lorsque l'on omet de tenir compte du caractère aléatoire des lois de demande.

Pour se prémunir contre les aléas de ses ventes, le producteur prévoit des investissements dont la capacité excède la demande moyenne (au sens probabiliste) d'une marge de sécurité qui, la plupart du temps, reste inemployée. De ce chômage partiel des équipements on serait tenté de déduire que le prix marginal ne doit comporter aucune charge d'investissement.

En fait, le coût des marges de sécurité est imputable au caractère garanti de la fourniture. Seule, la partie de la clientèle qui accepte d'être servie irrégulièrement au gré des disponibilités peut prétendre à juste titre ne supporter qu'une part réduite des charges fixes. Les autres consommateurs, en revanche, doivent supporter, outre leur part des charges fixes de la capacité "moyenne" de production, une part des charges afférentes à la marge de sécurité. Cette part sera d'autant plus forte que leur demande est plus irrégulière relativement à l'irrégularité de la demande globale.

La plupart des marchés ne se prêtent pas à une étude poussée de l'irrégularité des demandes individuelles. Tout au plus pourra-t-on distinguer trois types de clients: le client régulier exigeant d'être servi, le client irrégulier exigeant d'être servi; le client n'exigeant pas la garantie de la fourniture.

A la première catégorie se rattache la pratique d'abonnements à prix réduit, à la seconde le tarif ordinaire, à la troisième des conditions exceptionnellement avantageuses.

Certains marchés, tel celui de l'électricité, se prêtent au contraire à des différenciations beaucoup plus poussées. Il semble alors possible de

“tarifer l'irrégularité” à son coût marginal de telle manière que l'abonné régularise sa demande dans toute la mesure où l'accroissement qui en résulte pour ses dépenses reste inférieur à l'économie corrélative réalisée par le producteur.

L'étude des aléas de la demande permet de préciser ce que doit être cette différenciation, et, suivant les marchés, soit d'établir des tarifs exactement adaptés à l'irrégularité de chaque client, soit de calculer le niveau optimum des tarifs ordinaires, d'abonnements, et de fourniture non garantie.

DISCUSSION : La différenciation du prix de vente suivant les degrés de régularité de la demande des consommateurs se rattache aux buts que le producteur se propose d'atteindre et à la forme du marché considéré. Le rappel à la théorie de la vente au coût marginal fait penser que l'auteur a probablement en vue le profit net maximum dans un régime de concurrence limitée par une reproduction imparfaite des offres. En ce cas, on peut reconnaître l'avantage que la somme des quantités vendues dans une certaine période soit portée au niveau donnant lieu au prix correspondant à un coût marginal plus élevé que le coût moyen.

En connexion à ce résultat, la détermination des prix différentiels suivant les degrés de régularité des diverses catégories de demande ferait cas de l'élasticité de ces catégories et aussi de la recette qui en découle par rapport aux charges fixes. Si on fait des fautes dans la prévision des demandes correspondant aux prix différentiels et si les demandes dépassent les offres, l'entrepreneur doit être à même de modifier les prix ou de repousser les demandes sans garantie de fourniture, de satisfaire les demandes excédant la garantie dans la mesure de la garantie même, et, si l'excès n'est pas éliminé, d'offrir aux demandes garanties sans limite une pénalité compensatrice aux conditions établies. L'entrepreneur qui, au lieu des pénalités, préfère le maintien d'installations excédant ses prévisions possibles, ne semble pas s'inspirer du profit net maximum. Il est naturel qu'à des conclusions différentes on parvienne s'il modifie ses buts ou les conditions postulées du marché, car il aura la possibilité de favoriser à l'une ou l'autre catégorie de clients et de se préoccuper des intérêts généraux dans les formes préférées.

*Utilité et tarifs des services publics*, N. BACHET, Ingénieur en Chef des Transports, Paris.

LES DEUX questions peuvent sembler distinctes et devoir être traitées séparément. En réalité elles sont liées.

Le but poursuivi n'est pas d'expliquer les faits, mais de porter un jugement sur une option : projet de création ou de suppression d'un service public, tarifs à appliquer, répartition des impôts à la charge de différentes productions, etc.

Ce jugement est trop souvent porté d'après des notions très confuses. Le problème est toujours de comparer un état  $E_2$  proposé à un état donné  $E_1$ , le plus souvent séparé du premier par une discontinuité. Il faut comme toujours supposer “toutes choses égales d'ailleurs” car autrement la comparaison n'aurait pas de sens. On supposera dans les états  $E_1$ ,  $E_2$  les mêmes conditions de l'emploi des facteurs de production.

Les tarifs projetés font partie de la définition de  $E_2$ . Pour les autres prix on devra supposer qu'ils assurent le maintien de l'emploi et cette hypothèse, qui ne suffirait pas à les définir, doit être complétée par toutes celles qu'il faut retenir en fait.

Il faut adopter un critère de l'opportunité de la décision projetée, autrement dit de ce qu'on pourrait appeler "l'utilité générale". Ici il faut se méfier des mots. Il n'y a pas d'utilité en un sens analogue à celui que l'on trouve par exemple en physique dans les notions d'énergie interne ou de potentiel. Il faut délimiter avec soin la portée des concepts. Une difficulté spéciale résulte de certaines discontinuités. On construit un chemin de fer avec un nombre entier de voies. Il faut intercaler entre  $E_1$  et  $E_2$  des états intermédiaires fictifs  $e_1, e_2, \dots$ , qui donneront un chemin d'intégration continu. Cette méthode utilise des notions classiques, mais celles-ci sont appliquées d'une manière particulière. Puisqu'il ne s'agit pas d'expliquer les faits, on se libère de certains postulats et on considère les prix tels qu'ils sont ou seront dans la réalité. Quand il s'agit de la construction d'un chemin de fer, les options à juger sont multiples. Lorsque le chemin de fer est construit, il faut se demander quels sont les tarifs qui susciteront son utilisation optima. A chaque problème correspond sa marge concrète de variations plus ou moins importantes et la méthode peut être appliquée sur cette donnée de fait sans hésitation.

*Sur la demande de l'or et plus généralement des biens durables*, F. DIVISIA, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris.

IL EXISTE des études purement statistiques sur la demande des biens durables, notamment celle qui a été publiée dans *ECONOMETRICA* par MM. Charles F. Roos et Victor S. von Szeliski ("The Demand for Durable Goods," Vol. 11, April, 1943, pp. 97-122). Du point de vue de la théorie des choix on peut observer que les quantités demandées annuellement constituent des flux alors que le besoin en biens durables est un besoin en stock. Il en résulte que, pour de tels biens, la forme de la loi de la demande n'est pas la même que pour les biens ordinaires de consommation et fait intervenir, à côté des quantités elles-mêmes, leurs dérivées par rapport au temps. Dans le cas de la demande de l'or cette situation particulière complique pas mal la théorie mathématique de la monnaie convertible; à cet égard une étude spéciale n'est donc pas sans intérêt.

Mais la situation n'est pas spéciale à l'or. Dans le cas des biens durables en général, la demande annuelle comprend deux parties, l'une correspondant à la variation du besoin en stock causée par un changement du prix et par les facteurs généraux de variation, et l'autre, au besoin en flux pour le renouvellement des biens parvenus à bout

d'usure. En général on écrit :

$$q = \frac{\partial U}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + aU(p, t),$$

où  $p$  est le prix,  $U$  la quantité en usage correspondante,  $q$  la demande par unité de temps  $t$ , et  $a$  le taux annuel de remplacement.

Enfin la question soulève un problème général de concept, qui n'est peut-être pas sans intérêt, touchant la définition même des biens durables; en effet les biens ne se classent pas à cet égard en deux catégories nettement tranchées, mais il y a en réalité toute une gamme de biens plus ou moins durables. Or, comme l'étude de la demande ne se présente pas de la même manière selon que les biens sont durables ou non durables, il y a une antinomie qu'il sera bon d'élucider.

DISCUSSION: Au point de vue statique la demande des biens durables est la demande des substitutions causées par leur usure et elle ne diffère pas de la demande des biens non durables. Au point de vue dynamique les dites demandes sont l'une et l'autre aussi fonctions du temps et pareillement aussi des stocks des producteurs et des consommateurs: pour les biens durables les stocks des consommateurs sont accrus par les biens en usage, qui généralement donnent lieu aux marchés séparés des biens usagés, qu'il faut pour cela considérer comme biens rivaux. Le cas de la demande de l'or-métal est particulier à certains biens durables, dont l'usage ne donne pas lieu à un autre marché.

La difficulté de séparer nettement les biens durables des biens non durables est générale dans l'étude des faits, où nous rencontrons toujours des nuances et d'autres difficultés qu'il faut surmonter par des séparations idéales aux fins de l'analyse scientifique.

D'ailleurs il ne faut pas oublier que la plus part des biens durables de consommation sont consommés rapidement car, étant donné le progrès de la technique, de la mode et de la richesse, ils sont généralement produit en vue d'une courte durée et leur production annuelle correspond à un pourcentage bien considérable des quantités existantes. Dans le calcul annuel du revenu national des divers pays il sont assimilés, peu d'exceptions près, aux biens non durables et on admet que l'erreur serait appréciable dans les périodes très rares, qui voient le volume de leur production varier très rapidement.

*La demande des biens indirects*, R. ROY, Institut de Statistique de de l'Université de Paris.

Parmi les problèmes qui ont retenu l'attention des premiers économètres, figurent en bon rang les lois de la demande. Or, il n'est pas inutile de constater que ces travaux ont porté à la fois sur les biens d'utilité directe et sur les biens d'utilité indirecte: dans les recherches de Moore, par exemple, aucune distinction n'est établie entre la demande du coton et celle du sucre. C'est seulement plus tard que se manifesta le souci de marquer, plus ou moins explicitement, cette distinction qui nous paraît fondamentale.

Les études spéciales qui ont eu en vue la demande des biens indirects,

en particulier celles de MM. Evans et Roos, paraissent n'avoir considéré, à notre connaissance, que l'aspect statistique du problème. Elles présentent, néanmoins, le grand mérite d'avoir clairement fait ressortir la différence de nature qui existe, en matière de demande, entre biens directs et biens indirects; c'est ainsi que la méthode de régression temporelle, appliquée avec succès aux biens directs, s'est révélée insuffisante pour les biens indirects et que les auteurs des recherches en cause ont éprouvé le besoin d'introduire, outre le temps et le prix du bien étudié, des termes destinés à tenir compte du caractère spéculatif de certaines décisions, comme la dérivée du prix par rapport au temps ou les prix concernant des époques différentes.

Nous nous proposons d'aborder l'examen théorique du problème en reliant la demande des biens indirects à celle des biens directs qu'ils servent à produire. Cette manière d'envisager le problème implique la nécessité de mettre en jeu les liens que les procédés de fabrication établissent entre biens directs et biens indirects. Il est évident, par ailleurs, qu'une distinction devra être faite entre matières premières et produits finis, semblable distinction étant, au reste, de nature à mettre en lumière toute une gamme de situations différentes pour l'ensemble des biens indirects, selon le nombre et l'importance des opérations qui conduisent de la matière première au bien directement consommable.

En procédant à une telle investigation, nous pensons contribuer à éclaircir quelque peu la conception même d'une loi de demande qui, déjà subtile et délicate pour les biens directs, quoique fondée sur la notion d'utilité ou d'indifférence, exige encore plus de précautions et de perspicacité lorsqu'il s'agit des biens indirects, puisqu'il n'est plus possible alors de faire appel à ces notions. Il va de soi que notre ambition est plutôt de poser que de résoudre les problèmes.

*The Demand for Food in the United Kingdom*, R. STONE, University of Cambridge.

IN EARLIER papers (e.g., "The Analysis of Market Demand: An Outline of Methods and Results," in the *Review of the International Statistical Institute*, Vol. 16, 1948) the results were given of a number of analyses of market demand based on time series for the United Kingdom covering the period 1920-1938. In view of the limited amount of information contained in such short time series it is possible to improve the analyses if a second source of information can be used to determine one or more of the parameters in the demand equations. In this paper analyses are given for a number of foods and food groups based on (a) budget studies and (b) time series.

The budget studies used were the Ministry of Labour inquiry into the expenditure of industrial households in the year 1937-38 and the inquiry



undertaken by the Civil Service Statistical and Research Bureau into the expenditure of public officials in the year 1938-39. Both these inquiries used substantially the same form of questionnaire. Figures of household income were not collected in these inquiries and so total expenditure has to be used in the place of income as a determining variable for expenditure on individual items. From the budget material the parameters in the following expression were determined for each food or food group:

$$(1) \quad (v/n) = a(E/n)^b n^c e^{ds},$$

where  $v$  = the household's expenditure on a particular food or food group,  $n$  = the number of equivalent adults in the household,  $E$  = total household expenditure, and  $s$  is a variable put equal to 0 in the case of industrial households and 1 in the case of households of public officials in order to admit the possibility of a systematic difference in the mean behaviour of these two groups. The constants  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $d$  are to be determined from the data available which takes the form of averages for different total expenditure groups. In obtaining estimates of the average number of equivalent adults per household in each group, use was made of the Amsterdam scale of equivalents.

With the material available it turns out that the variables  $\log(E/n)$ ,  $\log n$ , and  $s$  are approximately connected by one linear relationship. Consequently, it is necessary to reduce the number of the determining variables in the equation to two and reasons can be given for omitting  $n$ . The parameters  $a$ ,  $b$ , and  $d$  are then determined for each food or group of foods.

The parameter  $b$  is an estimate, not of the income elasticity of demand, but of the total expenditure elasticity. It is assumed that the latter is greater than the former, and estimates of the income elasticities are made by taking 90% of the total expenditure elasticities. These values are taken as exact, and the resulting influence of income on the quantity of consumption of the different foods or group of foods, as shown by time series over the period 1920-1938, is calculated. These adjusted estimates of consumption are then expressed in terms of price series, the expression used being of the form

$$(2) \quad \Delta' \left( \frac{q_i}{N} \right)' - b \Delta' \left( \frac{Q}{N} \right)' = A + B \Delta' \left( \frac{p_i}{\Pi} \right)' + C \Delta' \left( \frac{p_j}{\Pi} \right)',$$

where  $q_i$  is the quantity consumed of an individual food and  $N$  = total number of equivalent adults,  $Q$  = total real income,  $p_i$  = the price of commodity  $i$ ,  $p_j$  = the price of some related commodity and  $\Pi$  is the price level of all other consumers' goods and services. The operator  $\Delta'$  indicates that first differences are taken, and the primes on the variables

indicate logarithms. The parameters  $A$ ,  $B$ , and  $C$  are then determined from the time series. First differences are taken to reduce the serial correlation in residuals from the fitted regression planes, and price ratios are taken as variables to insure that the proportionality conditions are satisfied. In some cases a third price ratio is included in the analysis.

There are a number of difficulties in combining budget data and time series in this way of which perhaps the most important is that the budget material available records the value of purchases and not the quantity purchased and there is a tendency for these values to reflect improvements in quality at the higher levels of total expenditure. At the same time, the methods used of compiling the time series do not permit quality differences to be reflected to the same extent. As a consequence, the estimated income elasticities obtained from the budget material may in some cases be put too high in relation to the time series actually used.

The relative magnitudes of the income elasticities for the different commodities seem on the whole to be in accord with what might be expected a priori. Further, the analysis using time series indicates that in most cases prices have a significant influence on demand and the signs of the price coefficients are as a rule in accordance with theoretical expectations. The fact that the time series analyses were made with first differences means that the parameters  $A$  are estimates of the residual trend. Although these trend coefficients are in some cases large, they are in almost all cases not significant.

It is possible to improve the estimates of the parameters by dropping the assumption that  $b$  is accurately known from the budget material and by obtaining a maximum-likelihood estimate of the income elasticity from budget and time-series material taken together simultaneously. This refinement has not, however, been carried out at the present time.

**DISCUSSION:** The national economic accounts and decision models give new life to the studies on empirical equations of demand for goods and services, which were not utilized until recently. Severe difficulties still remain, and in order to minimize them the author proposes some devices, in the foodstuffs field, such as the joint utilization of budget data, reliably employed for that purpose by Professor Pigou, and of time series, also reliably employed by Professor Moore. The former present the advantage of utilizing current data, which the static theory of consumption may efficiently help to interpret; while the latter may supply more extended information, whence the elimination of trends, of autocorrelation of residuals, and so on, should be made possible.

Equations (1) and (2) have no theoretical claims. They merely describe the experience of the United Kingdom during the period considered. What is important is the empirical ascertainment of a good approximation to reality of (1), which is linear with respect to logarithms and could be, therefore, further simplified. But it is not very probable that the time-series trends are of such a form that they can be eliminated by taking the first differences. Moreover, the autonomous

part of the trend coefficient depends on two observations only, i.e., the first and final observations in time of the dependent variable. So it is to be feared that random factors will determine to a large extent the resulting value.

*The Effects of Rationing on Demand Elasticities*, J. TOBIN, Yale University, and H. S. HOUTHAKKER, University of Cambridge.

WHEN some consumers' goods are rationed, the demand functions for unrationed commodities will obviously be affected. Income can no longer be spent on the most preferred goods, and substitution is also restricted. The nature and extent of the resultant changes in demand elasticities are of interest to the econometrician who wants to use consumption figures referring to a period in which some commodities are rationed. Although no complete theory of these effects of rationing has yet been developed (owing to the difficulty of dealing with noninfinitesimal changes in the customary theory of choice), some theorems which may be relevant are given here. They refer to small changes from a situation which was optimal before the introduction of rationing. Their usefulness may be compared to that of Slutsky's equation. Mathematically, rationing means that the utility function is maximised subject to other constraints in addition to the usual budget restriction. The fact that some of these constraints may be inequalities rather than equalities will be ignored here: rationing is assumed to be effective. Rationing not only changes the ordinary demand elasticities with respect to prices and income, it also introduces a new kind of coefficient: the elasticity of the quantity of an unrationed good with respect to a change in a ration. With the aid of the matrix of first and second derivatives of the utility function it is possible to state the interrelations of all these coefficients. Some results are:

1. If  $x_k$  is the only rationed good, its ration being  $q_k$ , then

$$\frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}q_k} = \frac{X_{ik}}{X_{kk}},$$

where  $X_{rs}$  is the substitution term in the Slutsky-Hicks equation and the  $\bar{\partial}$  is barred to indicate that the coefficient refers to a situation of partial rationing.

2. Under the same assumptions we have

$$\frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}M} = \frac{\partial x_i}{\partial M} - \frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}q_k} \frac{\partial x_k}{\partial M}$$

and

$$\frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}q_k} \frac{\partial x_k}{\partial p_j},$$

where the unbarred  $\partial$  refers to the free-market situation.

3. More generally, when the goods  $x_{m+1}, \dots, x_n$  are rationed and the goods  $x_1, \dots, x_m$  are not, we have

$$\frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}M} = \frac{\partial x_i}{\partial M} - \sum_{h=m+1}^n \frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}q_h} \frac{\partial x_h}{\partial M}$$

and

$$\frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \sum_{h=m+1}^n \frac{\bar{\partial}x_i}{\bar{\partial}q_h} \frac{\partial x_h}{\partial p_j}.$$

DISCUSSION: In order to express the elasticities it suffices to calculate the partial derivatives and it is convenient to equalize at first a single good  $x_k$  to a constant  $q_k$ . The authors suppose that the consumer's position is the one postulated by Slutsky and differentiate taking into account the new conditions. The valuable results have the odd implication that "rationing" may not only deny desired goods to consumers but force unwanted goods on them. Should the ration  $q_k$  increase, it implies that consumption  $x_k$  does likewise, even if this rises above its free market value. However, the inequalities of the rations for different persons, under a given change in price, may become effective at different levels of prices, and the mathematical treatment of such inequalities, while somewhat complicated, does not seem impossible.

*Relations entre la structure de la consommation et le niveau optimum d'une population*, A. SAUVY, Institut National d'Etudes Démographiques à Paris.

CANTILLON disait que si le possesseur de terres en faisait un parc ou bien si, grâce à elles, il nourrissait un cheval d'agrément, il supprimerait les conditions d'existence d'autres hommes. Nous dirions aujourd'hui qu'en consommant des produits primaires il diminuerait la population du territoire, ou ne lui permettrait pas d'atteindre le maximum fixé par les ressources naturelles et la technique du moment. Et de même, le préjugé populaire ne se trompait pas, lorsqu'il s'insurgeait contre les princesses ou les courtisanes qui prenaient des bains de lait, produit primaire à rendement décroissant. La population eût trouvé avantage à ce que la princesse emploie plutôt des domestiques qui, grâce à leur salaire, se seraient nourries de ce même lait. La population eût été augmentée par ce détour. Alors que Cantillon étudiait ce problème en termes de population *maximum*, il s'agit aujourd'hui de la transposer en termes de population *optimum*.

Sans aborder la question générale de l'influence du progrès technique sur la population optimum, on peut observer que le progrès technique a pour effet d'accroître l'utilité relative du tertiaire et de déplacer la population du primaire vers le tertiaire, le secondaire jouant le rôle de pivot. Or, on démontre que la transformation d'activités primaires en activités tertiaires accroît la population optimum.

Parfois on est amené à supposer que la population primaire est une

donnée de fait. Ce fut, par exemple, le cas en France, et en d'autres pays pendant la pénurie. L'extrême répugnance du travailleur secondaire et du tertiaire à devenir primaire ne permettait pas, en effet, d'atteindre la répartition optimum correspondant à la technique du moment. Lorsque la population primaire est excédentaire, il peut également y avoir une certaine répugnance à changer d'état ou, plus exactement, les possesseurs de terres peuvent être assez puissants pour obtenir le maintien de la répartition professionnelle. Le problème consiste alors, non à répartir la population, mais à chercher quelle doit être la population commandée par la population primaire, donnée fixe (d'où le plan Marshall ou la politique d'exportations française qui s'amorce).

Nous concluons en résumé:

(a) que la population optimum est une notion commode qui permet utilement d'aborder la question du plein emploi;

(b) que la structure de la consommation a une importance essentielle sur le plein emploi et que les théories et surtout la pratique négligent trop ce facteur essentiel;

(c) que nos études sont très imparfaites et que notre but ne sera réalisé que si elles incitent d'autres recherches de la part d'économistes, sur les nombreux problèmes qui ont été à peine posés.

DISCUSSION: Suivant un nouvel point de vue, l'auteur se propose courageusement de surmonter les difficultés de définir la population *optimum*. Dans une population donnée la structure de la consommation produirait en général des effets stimulateurs ou déprimants du nombre de producteurs qui assure le "revenu par tête" le plus élevé; ce nombre de producteurs dépendrait du rapport des biens et services tertiaires aux biens et services totaux. La première assertion générale est dérivée de Cantillon et on ne saurait pas la nier surtout après les explications keynésiennes; la deuxième assertion particulière serait la nouvelle définition de la population *optimum*, mais il reste avant tout la difficulté de définir le revenu par tête comme fonction unimodale des combinaisons d'activités disparates.

*On an Empirical Law Governing the Productivity of Labor*, P. J. VERDOORN, Centraal Planbureau, 's-Gravenhage, The Netherlands.

FOR THE purpose of making long term estimates of the future development of the productivity of labor, a comparison has been made in a number of cases between: (i) the rate of increase of labor productivity, and (ii) the corresponding increase of the volume of output. As a result of these investigations for industry as a whole, a fairly constant relationship has been found between the two rates of increase just mentioned. For the United States, the United Kingdom, The Netherlands, etc., regression equations have been computed showing the average relationship between the increase of productivity and output in a number of different branches of industry, when measured over long periods. The type of regression equation used was  $x/a = x^\alpha e^{\beta t}$ .

The statistician, impressed by this apparent dependency of the development of the productivity of labor on the growth of production, may feel inclined to formulate his findings in the form of an empirical law, in the same manner as Pareto sixty years ago formulated his famous law of the distribution of income. In this case the "law" would read that productivity as a rule has been increasing as the square root of the volume of output. As a matter of fact, however, a law of this type describes only the behavior pattern of the industrial entrepreneur and therefore cannot even be regarded as one of J. S. Mill's *axiomata media*, unless per chance a satisfactory explanation by means of technical conditions or the more general economic laws becomes feasible.

Using a model of long term structural equations, where the known Cobb-Douglas function is adopted, the elasticity of labor productivity with regard to output can be bound to significant parameters of the labor and capital supply, etc. A rigidly constant relation between the rates of increase of productivity and output appears not to be a necessary consequence of the model; nevertheless, the assumption of a constant elasticity, if not an ideal working hypothesis, might serve well as one of the criteria for judging the consistency of the existing long-term plans with the experience of the past.

DISCUSSION: We must not disclaim the great importance of empirical laws, which are often incentives to theoretical developments and necessary tools for their application. The results obtained would perhaps be improved by using productivity and employment as variables instead of productivity and output (since output = productivity  $\times$  employment). It is hard to attribute in general a homogeneity of first degree to a production function: compensations can occur in certain cases between increasing and decreasing industrial costs, and so on, but these should be factual ascertainments rather than a priori general assumptions. Homogeneity, however, does not present one of the general assumptions of that analysis.

*Wage Policy in Full Employment*, A. P. LERNER, Roosevelt College.

WITH the development of the theory of full employment, and the gradual acceptance of responsibility for the implementation of full employment policies by governments, more attention must now be paid to the problems which arise when full employment is being maintained rather than to the problem of reaching full employment. One of the gravest difficulties arises because of the tendency for wages to rise whenever employment is full, or nearly full. Where wages are established by bargaining, full, or very high, employment causes the bargaining power of the workers to become great enough to bring about wage increases, and these wage increases are not resisted too strongly by employers. The result is rising wages and rising costs, so the higher money wages are seen not to be

real increases, and then a further demand for higher wages, and so we can easily get into the spiral of inflation. Many responsible labor leaders have recognized this tendency but they are helpless to do anything about it as long as wages are determined by bargaining and it is the duty of the representatives of a particular group of workers to see that the wages of the workers they represent do not fall behind wages in general. This vicious circle could be broken if we could establish a method of adjusting wage rates which would keep the average level of wages from rising more than is made possible, without raising the price level, by increases in productivity or by other secular movements such as the change in labor's share of the product. Such a method of determining wages would have to be fair, not only as between workers and employers, but also as between the workers in different occupations.

In this paper a technique is suggested for obtaining such a method of wage determination. For each labor market there is obtained an index of the relative attractiveness of employment in that labor market. This index consists of the ratio between the number of people actually employed in that labor market and the number of people who are not employed there, who may be unemployed or may be employed somewhere else, but who would like to be employed in this particular section of the economy at the current wages and conditions of work. The aggregation of the index of the relative attractiveness of each labor market will give us an index of the average of attractiveness of the economy as a whole. Since productivity increases at about 3% per annum, wages in general should rise at that rate. We can therefore lay down the general principle that all wages should rise at 3% per annum, say 1% every four months. In any particular labor market where the index of attractiveness is much greater than the national average, say twice as great or more, this is evidence that conditions there are considered better than elsewhere by the actual workers concerned. The regular wage increase would therefore not take place in that particular labor market as long as the index is more than twice the national average. If in any particular labor market the index of attractiveness is less than half the national average, this is evidence that conditions there are considered less satisfactory than elsewhere. In such a labor market wages would therefore rise by 2% every four months as long as the relative attractiveness remains less than half that of the national average.

The result would be to bring about wage rates which are fair, as really shown by the preferences of workers; which result in stability of the general wage level, and therefore the prevention of inflation; and which provide the necessary flexibility to deal with changes in the demand for different products and in the preferences of workers for different occupations. There are a number of problems connected with the collection of

information on which the indices of relative attractiveness would have to be based. And there are some problems of bringing about compliance with these principles by employers or by workers or labor organizations who would be tempted to interfere with the action in various ways. The most promising solution is to get the responsible labor organization to undertake the management of this scheme, with employers and consumers participating in its management so as to see that it is applied fairly and not perverted in the interests of particular sections of the economy against the general welfare.

DISCUSSION: A procedure whereby the persons registering a desire to enter a given industry are examined or subjected to a trial period would cause faked registrations or dubious answering of inquiries. Dynamic factors such as investment should be considered. Large investment raises productivity and makes wage policy-making easier; on the other hand, it seems difficult, under full employment, to have large investment without planning. Probably decision models can be applied to the problem, though a limitation is that it would be very difficult to reduce wages in some industries. But, as the wage dispersion necessary to induce a better distribution of manpower depends on the level of employment, it may be possible to make wage policy-making much easier by a very small reduction in employment.

*Développement récent de l'indice d'égalité de la loi parétienne des revenus,*  
K.-G. HAGSTROEM, Stockholm.

LA STRUCTURE de la vie économique a beaucoup changé depuis le commencement de ce siècle. Deux tendances ont agi: l'inflation monétaire, en deux attaques violentes, qui ont détruit les petites fortunes placées dans des actifs monétaires, et la démocratisation, qui a amélioré la situation des ouvriers et dégradé relativement la classe moyenne. Il faut ajouter l'augmentation énorme des impôts, qui doit avoir chassé, par crainte, beaucoup de revenus des déclarations, servant de base à la taxation et aussi, malheureusement, à la statistique.

La validité de la loi de Paréto pour exprimer la distribution des revenus moyens et élevés est incontestable. Il est vrai qu'elle ne peut pas comprendre les petits revenus qui, cependant, deviendront de plus en plus importants pour la vie économique. Les termes additives qu'on a proposées et les essais de trouver d'autres lois plus compliqués ont, à ce qu'il semble, peu d'intérêt. L'étude de la signification théorique de la fonction parétienne, considérée comme représentation quasi asymptotique, d'autre part, doit être plus intéressant.

Les statistiques accessibles ont révélé une révolution assez incomparable dans la distribution des revenus après la seconde guerre mondiale. J'ai publié des résultats dans le journal trimestriel de *Skandinaviska Banken* à Stockholm. "L'indice d'égalité" (ou bien la constante de la fonction parétienne) a atteint des valeurs qui seraient incroyables aux



statisticiens d'autrefois. Une question bien délicate est de savoir dans quelle mesure ce changement est réel et qu'il signifie.

On peut suivre deux lignes d'explication. Ou le phénomène est-il fortuit, dérivant en premier lieu de l'inflation et d'une taxation exagérée et passagère et finira-t-il par retourner un jour à la situation d'avant-guerre? Ou bien s'agit-il d'un glissement définitif du terrain économique, progressant par poussées ou en ondes, qui laissera finalement à la société humaine une structure très différente de celle que nous sommes accoutumés à considérer comme normale?

DISCUSSION: La première expression de la loi de Paréto néglige les revenus situés en proximité de la classe plus nombreuse (modal) et se borne à représenter le trait descendant de leur distribution. Pour sa grande simplicité cette expression est généralement préférée aux autres bien plus approchées à la réalité, qui ont été proposées par le même auteur et ensuite par d'autres économistes. Mais, lorsque la monnaie se dévalue sensiblement, il faut élever la limite inférieure du trait partiel considéré afin de négliger encore la classe plus nombreuse et ses environs et de respecter ainsi l'homogénéité des comparaisons. D'autre part il convient de bien distinguer les revenus bruts des revenus privés nets d'impôts: pour le 1935 aux Pays Bas l'inégalité moyenne de ces derniers a été de dix pour cent inférieure à celle des premiers. Peut être que récemment on ait eu une variation réelle de la susdite inégalité, mais l'avenir seul nous pourra assurer qu'elle est durable ou non.

*The Economics of City Planning*, L. H. KLAASSEN, The Netherlands Economic Institute.

THE BASIS for every municipal plan of extension must be a sound forecast of future population growth. The growth of the working population (which is proportional to total population) of a city depends on (a) natural factors (birth and death), and (b) economic factors (migration). The way in which both kinds of factors work out can be shown in a very simple long-run (full-employment) model describing the economy of a city.

Working population at point of time  $t$  is identical to working population at point of time  $t - 1$  plus natural growth plus migration (all, of course, within the group of the working population):

$$P_t \equiv P_{t-1} + \Delta^n P_t + M_t.$$

Migration depends (in a full-employment system) on the difference between the wage level in the city and the average wage level outside the city. The greater the difference, the greater the net migration.  $\alpha$  measures the mobility of labor:

$$M_t = \alpha(w_t - \bar{w}_t).$$

Total supply of labor equals total working population:

$$L_s = P_t.$$

Total demand for labor is the sum total of the demand for labor for primary activity and for secondary activity. Secondary activity is defined as total employment in firms in which sales necessarily (in the economic sense) depend on the city population:

$$L_d \equiv L_d^p + L_d^s.$$

Demand for labor for primary activity depends on the wage difference and on exogenous (to the city's economy) factors. This may be consumption of the whole country or foreign countries, import prices, crops, etc.:

$$L_d^p = -\beta_1(w_t - \bar{w}_t) + \beta_2 Z_t.$$

Total demand for secondary activity depends on total population and, this being proportional to working population, also on the working population:

$$L_d^s = \gamma P_t.$$

Equilibrium condition:

$$L_d = L_s.$$

Elimination gives:

$$P_t = \frac{\beta_1/\alpha}{1 - \gamma + \beta_1/\alpha} (P_{t-1} + \Delta^n P_t) + \frac{\beta_2}{1 - \gamma + \beta_1/\alpha} Z_t$$

The two limiting cases are:

- (1)  $\beta_1/\alpha \rightarrow 0$ :  $P_t = \frac{\beta_2}{1 - \gamma} Z_t$ ,  
 (2)  $\beta_1/\alpha \rightarrow \infty$ :  $P_t = P_{t-1} + \Delta^n P_t$ .

In case (1) working population, and therefore total population, is determined only by exogenous *economic* factors; in case (2) only by (exogenous) *natural* factors. In the most general case, by both kinds of factors, the strength of the influences depends on the elasticities of the supply of and demand for labor.

For the statistical estimation of  $\gamma$ : (a) We express the numbers of people working in different groups of industries and other branches as a percentage of total population. (b) We determine the percentages  $x_j^i$  for each group for each city [ $i = 1, 2, \dots, n$  (groups);  $j = 1, 2, \dots, m$  (cities)]. (c) We assume that the smallest percentage indicates the minimum percentage of total population that must be working in the group (secondary activity). Let us call it  $x^i$  for group  $i$ . Primary activity in city  $j$  is then defined as the difference between total activity  $x_j^i$  and secondary activity  $x^i$ , i.e.,  $x_j^i - x^i$ . (d) The character of a group is indi-

cated by the coefficient of variation:  $V_i = \sigma_i/\bar{x}^i$  in which  $\bar{x}^i = \sum_j x_j^i/n$  and  $\sigma_i^2 = \sum_j (x_j^i - \bar{x}^i)^2/n$ .

When  $V_i = 0$ , the whole group can be considered as secondary; when  $x^i = 0$ , the whole group is primary.

The value of  $\gamma$  found in Holland is 0.5.

DISCUSSION: The Klaassen system relates to a more general case regarding public services, etc. It is perhaps proper that in further elaborations employment in a town's secondary industries depends not only on total population but more specifically on total income in the town. The method employed in determining the minimum secondary employment is dependent upon the industrial classification used.

*De quelques propriétés de l'impôt sur le capital*, M. ALLAIS, Institut de Statistique de l'Université de Paris.

UN IMPÔT annuel sur le capital ne modifierait pas sensiblement la valeur globale du capital national ni sa productivité marginale. Les valeurs des différents capitaux (équipements et terres) resteraient sensiblement inchangées.

Un impôt annuel sur le capital est profondément différent dans sa nature et dans ses effets d'un impôt sur le revenu. Il apparaît à la fois comme beaucoup plus efficace et conforme aux idéaux de justice tels qu'ils paraissent d'exprimer habituellement.

Un impôt sur le capital réaliserait dans le cadre d'une économie de marché la confiscation des revenus non gagnés (autres que ceux provenant du travail et du risque), c'est à dire au fond la confiscation de la plus-value en sens marxiste. Il constitue ainsi la base technique d'une synthèse possible du libéralisme et du socialisme.

Dans les conditions actuelles et pour un pays comme la France un impôt annuel sur le capital confisquant les 4/5 des rentes de rareté qui leur sont attachés pourrait probablement fournir une recette de l'ordre de 20 à 30% du revenu national, donc supérieure au rendement global de tous les impôts actuels.

DISCUSSION: Par des habiles argumentations économétriques, l'auteur soutient l'opportunité d'un impôt général sur le capital au lieu de l'impôt sur le revenu. Les revenus du travail et ceux correspondants à la rémunération de la prise en charge des risques échapperaient à l'impôt. Elle frapperait par des taux modérés les valeurs calculées en raison d'un rendement incitateur suivant les méthodes employées dans les valuations cadastrales des terrains en certains pays. Par conséquence ceux qui tirent un rendement plus élevé ou plus bas du rendement incitateur seraient respectivement avantagés ou endommagés.

On a dit que le revenu des riches serait réduit par l'impôt sur les consommations de luxe plus sûrement que par l'impôt sur le capital et qu'il serait toujours loisible de faire intervenir un impôt sur le revenu du travail en vue de réduire les inégalités provenant de talents exceptionnels.

Les aspects nationaux et internationaux de ce problème sont délicats et ont été étudié surtout en Angleterre, aux Etats Unis, et en Italie. Mais on peut douter que les argumentations économétriques, même admise leur validité, soient les plus convaincantes, surtout si on suit le point de vue de Paréto à cet égard. Selon la pensée parétienne, on peut construire ou du moins espérer de construire des théories rationnelles de la conduite de l'entrepreneur plus ou moins approchées de la réalité, mais les théories rationnelles de la conduite de l'état en ce qui concerne les contributions sont très éloignées des faits: elles sont les *dérivations* des intérêts (en général, des *résidus*) des classes sociales en lutte pour jouir les bénéfices publics au moyen d'un minimum de sacrifices. A ce propos il faudrait particulièrement considérer les intérêts des élites dominantes et la rapidité de leur circulation dans les systèmes politiques représentatifs.

*Sur la théorie statistique des combinaisons héréditaires*, S. VIANELLI, Università di Palermo.

LE PROBLÈME de la détermination du retard constant (lag) d'une série historique en rapport avec une autre constitue un cas particulier du problème plus général concernant la distribution des retards de temps (distributed lags).

Pour bien comprendre, toutefois, l'insuffisance des notions statistiques introduites dans les nombreuses tentatives qui cherchaient à déterminer pratiquement ceux qu'on appelle *distributeurs*, il suffit de considérer que tous les critères et les procédés appliqués jusqu'à présent supposent deux hypothèses très simples, à savoir: (1) que la distribution des retards est *additionnelle*, c'est à dire que la valeur qui en résulterait serait une combinaison linéaire—avec des poids positifs—des valeurs du phénomène générateur; (2) que ce générateur est unique ou que, de toute façon, la distribution des retards n'est influencée par aucun autre facteur.

On peut déterminer, pour cela, les caractéristiques fondamentales, les propriétés, la nature, et la forme des principales distributions de retards—ou *combinaisons historiques héréditaires*—et en même temps les conditions qui doivent être satisfaites pour l'existence—et, par conséquent, pour la détermination analytique ou numérique—des distributions mêmes.

Quant aux conditions théoriques nécessaires afin que, par exemple, la combinaison puisse réellement prendre une forme constante dans le temps, selon l'hypothèse, la plus simple, de deux phénomènes économiques *A* et *B*, dont le premier puisse être pris tel un *générateur* et le second tel un *résultant*, si l'on connaît la loi de la série historique de *A*, il est nécessaire de déterminer la loi analytique qui représente la courbe de la série résultante de *B*, lorsque la combinaison historique héréditaire est linéaire et constante. Nous avons résolu ce problème pour deux cas généraux: (1) le cas où la loi de *A* est représenté par une fonction rationnelle entière; (2) le cas où la loi de *A* résulte de la somme d'oscillations

trigonométriques-exponentielles. Le procédé suivi peut être facilement étendu à d'autres cas simples.

Dans le premier cas, en général, on démontre qu'afin qu'il soit permis de partir de l'hypothèse d'une combinaison héréditaire constante dans le temps, lorsque  $A$  est représentée par une fonction rationnelle entière de degré  $m$ , il est nécessaire que même la série résultante  $B$  corresponde à une fonction rationnelle de degré  $m$  et que les différences  $m$ -ièmes constantes de  $A$  et  $B$  soient égales.

En particulier, par exemple, afin que l'on puisse considérer qu'une tendance générale linéaire est résultante d'une autre tendance générale linéaire, par une combinaison héréditaire constante dans le temps, c'est une condition nécessaire que les deux tendances soient représentées par des droites ayant le même coefficient angulaire, c'est à dire par des droites parallèles. Dans le second cas général, on démontre qu'afin qu'il soit permis d'assumer l'hypothèse d'une combinaison héréditaire constante dans le temps, lorsque  $A$  est représentée par des oscillations trigonométriques-exponentielles superposées, il est nécessaire que même la série résultante corresponde à la somme d'un égal nombre d'oscillations trigonométriques-exponentielles et que les ondes élémentaires composant la  $A$  et la  $B$  aient respectivement, dans les deux séries, des périodes et des facteurs exponentiels égaux.

On peut démontrer, en général, la persistance, sous certaines hypothèses, de la même forme analytique, du phénomène générateur et du phénomène résultant, et on peut procéder, sous les hypothèses introduites, à la détermination analytique du phénomène résultant par deux ou plusieurs générateurs avec forme analytique assignée.

*Quelques éléments d'une théorie statistique des erreurs de proportion,*  
F. BIGNARDI, Università di Palermo.

DANS les diverses branches de la recherche statistique, et en particulier dans la statistique économique, on a fait de nombreuses applications de la fonction appelée "loi de l'effet proportionnel", en expliquant sa genèse, en général, comme une particulière déformation de la loi théorique de probabilité des erreurs d'observation.

La même fonction, si l'on admet la possibilité de l'existence d'une loi théorique de probabilité des erreurs de proportion, se présente comme une plausible forme analytique de cette loi. En considérant, à ce propos, le cas d'une grandeur variable dont les valeurs puissent être pensées affectées d'erreurs de proportion par rapport à une grandeur constante  $X$ , et en généralisant dans le domaine des probabilités un principe énoncé par Galilée (d'après lequel les erreurs de proportion dont deux valeurs sont affectées par rapport à  $X$  doivent être considérées équivalentes

lorsque leur moyenne géométrique coïncide avec  $X$ ), la loi de probabilité qui suit cette fonction présente de considérables propriétés.

On peut remarquer en effet—selon la signification qu'on assigne conventionnellement au principe d'équiprobabilité des erreurs de proportion équivalentes, appliqué à une variable aléatoire continue—(a) que les densités de la probabilité correspondantes à deux valeurs affectées, par rapport à la mode, d'erreurs de proportion équivalentes, sont égales; et (b) que les probabilités totales correspondantes à deux intervalles situées à droite et, respectivement, à gauche de la médiane, dont les extrêmes soient affectées par rapport à la médiane d'erreurs de proportion équivalentes, sont égales.

Ainsi, lorsqu'une distribution statistique est telle qu'on peut bien la représenter par la "loi de l'effet proportionnel", il sera permis, du point de vue formel, d'en attribuer la configuration à l'action d'un ensemble de circonstances agissant de façon à donner lieu à des erreurs de proportion par rapport à une grandeur constante; et de qualifier "valeur typique" cette constante, s'identifiant avec la mode ou avec la médiane, selon la signification qu'on assigne au principe d'équiprobabilité des erreurs de proportion équivalentes.

La possibilité d'attribuer à la fonction citée un fondement rationnel et des caractéristiques formelles suivant cette théorie statistique des erreurs de proportion amplifie la faculté de choix entre les principes interprétatifs, dont on peut essayer l'application dans l'étude des distributions asymétriques positivement.

BIBLIOGRAPHIE: F. BIGNARDI, "Di una distribuzione statistica deducibile da un principio degli errori di proporzione", *Annali della Facoltà de economia e commercio dell'Università di Palermo*, n. 2, 1948; "Nuovi contributi ad una teoria statistica degli errori di proporzione," *ibid.*, n. 1, 1950; "La funzione di McAlister-Kapteyn come fondamento razionale di una nota distribuzione di probabilità", *Atti della XI Riunione scientifica della Società italiana di economia demografia e statistica*.

*Enquête par sondage en milieu agricole*, J. MILHAU, Montpellier, France.

LA RECHERCHE économétrique tend souvent de nos jours à renouveler la méthode abstraite (modèles); elle risque ainsi de se heurter aux critiques générales adressées maintes fois à la méthode déductive; il ne faudrait pas, en effet, sacrifier l'induction qui a donné les plus brillants résultats dans tous les domaines de la recherche scientifique.

Nous avons organisé dans le Midi languedocien, en liaison avec la Direction Régionale de la statistique, une enquête par sondage portant sur la structure du vignoble local. A ce jour cette enquête est terminée et exploitée pour le département de l'Hérault qui est le premier départe-

ment viticole français; l'enquête est en cours d'exploitation pour les départements de l'Aude et du Gard.

Les premiers résultats obtenus nous inclinent aux conclusions suivantes:

(1) Quelles que soient les objections d'ordre théorique qu'on puisse faire à la méthode des sondages appliquée à une population aussi hétérogène qu'un ensemble d'exploitations agricoles, l'expérience révèle une concordance satisfaisante entre l'extrapolation du statisticien et les divers contrôles dont nous disposons. Nous pensons donc qu'une enquête de cette nature peut donner les résultats utilisables aussi bien pour la théorie, que pour la pratique.

(2) Les difficultés psychologiques de l'enquête par sondage, aussi importantes qu'elles soient dans un milieu rural, ne sont pas insurmontables, à condition d'établir une collaboration confiante entre théoriciens et praticiens et d'utiliser au maximum le concours des "autorités sociales".

**DISCUSSION:** Les sondages se sont révélés indispensables presque dans tous les domaines de la recherche statistique. Les conclusions de l'auteur seraient bien plus importantes, s'il eût exposé le plan du sondage signalé et les résultats obtenus par les contrôles, étant donné que la théorie en est encore fort imparfaite et que es dits contrôles souvent se bornent à quelques caractères généraux.